

Nombres Complexes

① - Introduction

- $i^2 = -1$

- $z \in \mathbb{C}, z = a + ib$
 $\text{Re}(z)$ $\text{Im}(z)$

- additionner, multiplier, diviser, puissance, inverser.



penser au conjugué

• Conjugué : $\bar{z} = a - ib$

• opposé : $-z = -a - ib$.

• deux nombres complexes sont égaux ssi : $\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$

↳ $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$

• module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

↳ apprendre les propriétés

• $\begin{cases} z \text{ réel} \Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{cases}$

- $\arg(z)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{Oz})$

- $\left\{ \begin{array}{l} z \text{ réel} \\ z \text{ imaginaire pur} \end{array} \right. \Rightarrow \arg(z) \equiv 0 [\pi]$
 $\left\{ \begin{array}{l} z \text{ réel} \\ z \text{ imaginaire pur} \end{array} \right. \Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
 ↳ connaître en plus les petites propriétés.

② - Différentes formes

- forme algébrique : $z = a + ib$
- forme trigonométrique :

$$z = |z| \left(\underbrace{\cos(\theta)}_c + i \underbrace{\sin(\theta)}_s \right)$$
$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

- forme exponentielle :

$$z = |z| e^{i\theta}$$

↳ même propriétés que e^x exponentielle.

③ - Racines de l'unité

- $U = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

- $z^n = 1$

- ↳ $z = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

④ - Formules trigonométriques

$$\bullet \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\bullet \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$= 2\cos^2(a) - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$$

- Formule de Moivre :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

- Formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$