

Les Suites

EXERCICE 4

Suite arithmético-géométrique

(5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

On pose $v_n = u_n - 6$

1) a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) Donner une valeur approchée de u_8 à 10^{-3} près.

~~Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite ? Justifier.~~

2) On note $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{100}$.

a) Déterminer la valeur exacte de S puis une valeur approchée.

b) En déduire une valeur approchée de la somme $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.

$$1) a) v_{n+1} = u_{n+1} - 6 \quad (1)$$

$$= 0,5u_n + 3 - 6 \quad (2)$$

$$= 0,5u_n - 3$$

$$= \underline{0,5} \left(u_n - \frac{3}{0,5} \right) \quad (3)$$

$$= 0,5(u_n - 6)$$

$$= 0,5 v_n$$

donc (v_n) est géométrique
de raison 0,5 et de
premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 7 - 6 = 1$.

$$b) v_n = v_0 \times q^n = 1 \times (0,5)^n = \underline{0,5^n}$$

$$v_n = u_n - 6 \quad \Leftrightarrow u_n = v_n + 6$$

$$\Leftrightarrow u_n = 0,5^n + 6$$

$$2) a) S = v_0 + v_1 + \dots + v_{100}$$

$$= v_0 \times \frac{1 - q^{101}}{1 - q}$$

$$= \frac{1 - 0,5^{101}}{1 - 0,5}$$

$$= 2.$$

$$b) S' = u_0 + \dots + u_{100}$$

$$= v_0 + 6 + \dots + v_{100} + 6$$

$$= \underbrace{u_0 + \dots + v_{100}}_S + 6 \times 101$$

$$= 2 + 6 \times 101$$

$$= 608.$$

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -2u_n + 3$

- a. Calculer u_1 , u_2 et u_3
b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
- On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1$
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison -2 .
- En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .

1) a) $u_1 = -2u_0 + 3 = -9$

$\times -\frac{7}{5}$ $u_2 = -2u_1 + 3 = 21$ $+30$

$-\frac{13}{7}$ $u_3 = -2u_2 + 3 = -39$ $-$

2) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$$= -2u_n + 3 - 1$$
$$= -2u_n + 2$$
$$= -2\left(u_n + \frac{2}{-2}\right)$$
$$= -2(u_n - 1) = -2v_n.$$

donc (v_n) est géométrique de
raison -2 et de premier
terme $v_0 = u_0 - 1 = 6 - 1 = 5$.

$$3) v_n = v_0 \times q^n = 5 \times (-2)^n$$

$$v_n = u_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n + 1$$

$$u_n = 5 \times (-2)^n + 1$$