

Suites

exercice 17:

• $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers l :

$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon.$

• $(u_n)_n$ est divergente vers $+\infty$:

$\hookrightarrow \forall A \leq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A.$

exercice 19:

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$-n \leq n(-1)^n \leq n$$

$$-n \leq u_n \leq n$$

donc $-n \leq u_n \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

en passant à la limite :

$$u_n \leq +\infty$$

$$u_n \geq -\infty$$

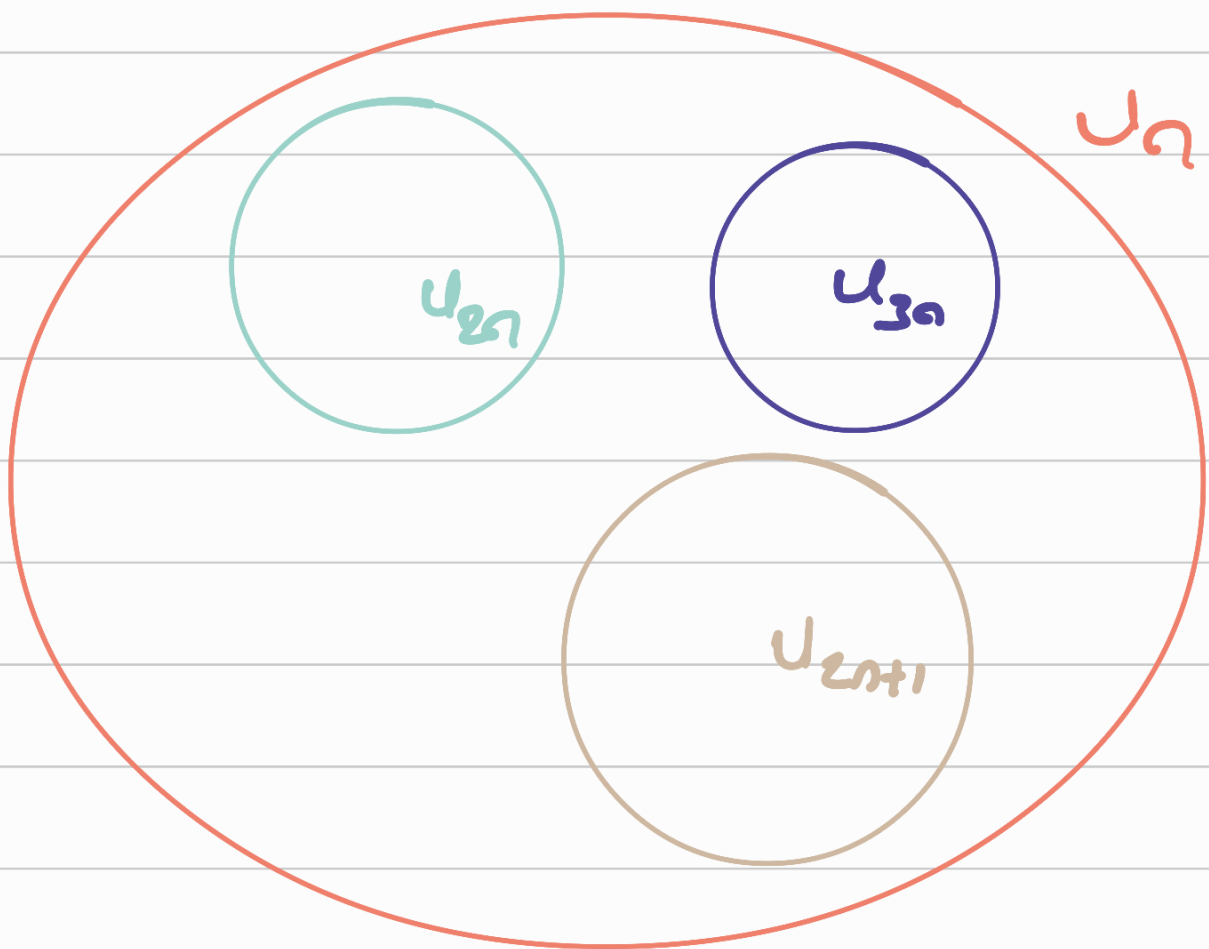
n paire : $u_{2n} = 2n(-1)^{2n} = 2n$
sous-suite $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

n impaire : $u_{2n+1} = (2n+1)(-1)^{2n+1}$

série - suite

$$= -(2n+1)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$



2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$0 \xleftarrow[n \rightarrow \infty]$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

donc d'après le théorème
des gendarmes la suite $(v_n)_n$
converge vers 0.

exercice 21:

1) $S = \sum_{k=3}^{n+3} u_k$

on pose $j = k - 3 \Leftrightarrow k = j + 3$

$$S = \sum_{j=0}^n u_{j+3}.$$

2) $S = \sum_{k=1}^n u_{2k}$

on pose $j = k - 1 \Leftrightarrow k = j + 1$

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} u_{2(j+1)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} u_{2j+2}$$

exercice 25:

Supposons la propriété vraie au rang n :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démontrons la propriété au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} + n^2+2n+1$$

$$= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

De plus :

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n^2 + 3n + 2)(2n + 3)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

done P_{n+1}