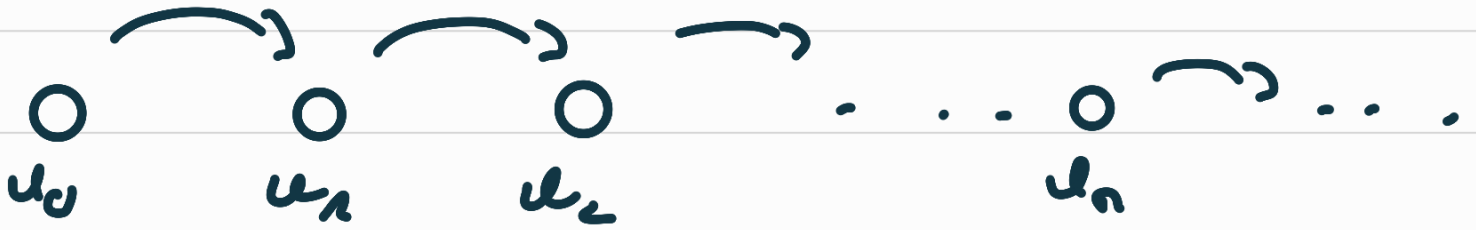


Réurrence



Formule Générale

Exercice 6

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Considérons la proposition : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Initialisation : on a $u_0 = 3$

De plus, $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$

donc la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité: Supposons la proposition vraie pour un certain rang $n \geq 0$, c'est-à-dire $u_n = 2^{n+1} + 1$.

↳ Montrons que la proposition est vraie au rang $n+1$, c-a-d $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.

On démarre toujours avec la formule de récurrence et après on utilise l'hypothèse de récurrence.

$$u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

$$= 2(2^{n+1} + 1) - 1$$

$$= 2 \times 2^{n+1} + 2 \times 1 - 1$$

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= a^{n+m} \end{aligned}$$

$$= 2^{n+2} + 1$$

donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Conclusion: La proposition est vraie au rang $n=0$ et est héréditaire, et donc par récurrence $u_n = 2^{n+1} + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 corrigé disponible

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0$$

et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :

$$u_n = n^2 + n$$

• En cadremont / Inégalité

Exercice 3 corrigé disponible

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$

1) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

Considérons la proposition :
" $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$ ".

Initialisation : on a $u_0 = 2$.

et $1 \leq u_0 = 2 \leq 2$.

donc la proposition est vraie
au rang $n = 0$,

Hérédité: Supposons la proposition
vraie pour un certain rang $n \geq 0$,
C.-à.-d. $1 \leq u_n \leq 2$.

↳ Montrons que la proposition
est vraie au rang $n+1$, c.-à.-d. :
 $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On démarre toujours avec l'
hypothèse de récurrence et on va
construire u_{n+1} .

Par hypothèse de récurrence :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

$$2 = 1+1 \leq 1+u_n \leq 1+2 = 3$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_n} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$1 \leq \frac{4}{3} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

$1,333$
 $1,5$

donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$, et
 la proposition est vraie au
 rang $n+1$.

Conclusion: La proposition est
 vraie au rang $n=0$ et est
 héréditaire, et donc par récurrence
 $1 \leq u_n \leq 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

Montrer par récurrence que (u_n) est bornée par $\frac{1}{2}$ et 5.

• Sens de variations

Exercice 13

On considère une suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante. $\rightarrow u_{n+1} \geq u_n$

Considérons la proposition :
" (u_n) croissante" ou " $u_{n+1} \geq u_n$
pour tout $n \geq 0$ ".

Initialisation : $u_0 = 1$ et
 $u_1 = \sqrt{1 + u_0} = \sqrt{2}$.

et $u_0 = 1 \leq \sqrt{2} = u_1$.

donc la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité: Supposons la proposition vraie pour un certain rang $n \geq 0$, c-à-d $u_{n+1} > u_n$.

↳ Montrons la proposition au rang $n+1$, c-à-d $u_{n+2} > u_{n+1}$.

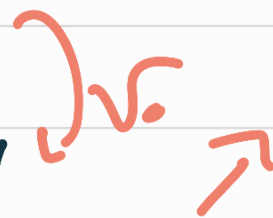
On démarre toujours avec l'hypothèse de récurrence et on va construire u_{n+1} et u_{n+2} .

Par hypothèse de récurrence

$$u_{n+1} > u_n$$

$$1 + u_{n+1} > 1 + u_n$$

$$\sqrt{1 + u_{n+1}} > \sqrt{1 + u_n}$$



$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Conclusion: La proposition est vraie au rang $n=0$ et est héréditaire, et donc par récurrence $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire (u_n) est croissante.