Matrices

exercice 37 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ε, $tr(A) = a + d$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

ε, $tr(A) = 1 + 2 = 3.$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ε, $tr(A^2) = 1 + 4 = 5.$

$\det(A) = 1\times 2 - 0\times 3 = 2$

2) $tr(A^2) = 5.$

$(tr(A))^2 - 2\det(A) = 3^2 - 2\times 2$

$= 5$

donc :

$tr(A^2) = (tr(A))^2 - 2\det(A).$

exercice 40 :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Et, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

donc A est nilpotente d'ordre 2.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nilpotente.
<u>non nulle</u>.
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Supposons par l'absurde que A est inversible.

$$A^k = 0$$

$$A^{-1} \times \Big\downarrow \qquad \Big\downarrow \times A^{-1}$$

$$A^{k-1} = 0$$

$$A^{-1} \times \Big\downarrow \qquad \Big\downarrow \times A^{-1}$$

$$A^{k-2} = 0$$

$$A^{-1} \times \Big\downarrow \qquad \Big\downarrow \times A^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A = 0$$

donc A n'est pas inversible.

exercice 41 :

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(M) = \begin{array}{c|ccc|c} & + & - & + & \\ - & 1 & 2 & 3 & - \\ + & 0 & 4 & 5 & + \\ - & 1 & 0 & 6 & - \\ & + & - & + & \end{array}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+ 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times (0\times 6 - 1\times 5) + 4(1\times 6 - 1\times 3)$$

$$= -2 \times -5 + 4 \times 3$$

$$= 10 + 12$$

$$= 22.$$

2) $$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1-(-2)) - 1\times(1-6)$$

$$= 2\times 3 - (-5)$$

$$= 6+5$$

$$= 11.$$

exercice 42 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 11 & -3 & -1 \\ 14 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

exercice 43 :

1)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\iff AX = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\iff AX = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

exercice 44 :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$AX = B.$$

on sait $X = A^{-1} \times B$.

$$\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times 3$$

$$= -5 \neq 0$$

donc A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

donc :

$$X = A^{-1} \times B \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/5 \\ -7/5 \end{pmatrix}$$