

Réurrence

Exercice 1

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Considérons la proposition :
" $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ".

Initialisation : D'une part, $S_1 = 0 + 1 = 1$

D'autre part, $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$.

Donc la proposition est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité :

Supposons la proposition vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

↳ Montrons que la proposition est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $S_{n+1} = 0+1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$S_{n+1} = \overbrace{0+1+2+\dots+n}^{S_n} + (n+1)$$

$$\begin{aligned} &= S_n + (n+1) \\ \text{H.R.} \quad &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La proposition est vraie au rang $n=1$ et est héréditaire, et donc par récurrence $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Type BAC

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1 \end{cases}$$

Considérons la proposition
" $a_n \geq 3n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$."

Initialisation: D'une part, $a_1 = 5$

D'autre part, $5 \geq 3 \times 1 - 1 = 2$

donc la proposition est vraie
au rang $n = 1$.

Hérédité: Supposons la proposition
vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$.
càd : $a_n \geq 3n - 1$.

↳ Montrons que la proposition est vraie au rang $n+1$, cād
 $a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1 = 3n + 3 - 1$
 $= 3n + 2.$

On a par hypothèse de récurrence :

$$a_n \geq 3n - 1$$

$$3a_n \geq 3(3n - 1)$$

$$3a_n \geq 9n - 3$$

$$3a_n - 1 \geq 9n - 3 - 1$$

$$a_{n+1} \geq 9n - 4$$

Est ce que $9n - 4 \geq 3n + 2$?

$$9n - 4 \geq 3n + 2$$

$$\Leftrightarrow 9n - 3n \geq 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 6n \geq 6$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{6}{6} = 1 \quad \checkmark$$

donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Conclusion: La proposition est vraie au rang $n=1$ et est héréditaire, et donc par récurrence $a_n \geq 3n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \underbrace{4P_n(u_n + 1)}_{f(u_n)} + \frac{u_n^2}{25} \end{cases}$$

on pose $f(x) = 4P_n(x+1) + \frac{x^2}{25}$

Considérons la proposition:
 $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation: D'une part,
 $u_0 = 2$ et $u_1 = 4,23$

D'autre part, $2 \leq 2 \leq 4,23 \leq 6,5$

donc la proposition est vraie
au rang $n = 0$.

Hérédité: Supposons la proposition vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c-à-d $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$.

↳ Montrons que la proposition est vraie au rang $n+1$, c-à-d $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6,5$.

Par hypothèse de récurrence on a:

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$$

on a démontré que la fonction f est strictement croissante sur $\Delta[2; 6,5]$.

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(6,5)$$

$$4,23 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6,37$$

$$2 \leq 4,23 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6,37 \leq 6,5$$

d'où $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6,5$.

donc la proposition est
vraie au rang $n+1$.

Conclusion: La proposition est
vraie au rang $n=0$ et est
héréditaire, et donc par récurrence
 $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$, $\forall n \in \mathbb{N}$.