

# Ensembles et Logique

## exercice 1:

1)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$  tel  
que  $x + y = 0$

non  $\neg \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},$   
 $x + y \neq 0.$

2)  $\exists x \in \mathbb{R}$  tel que  $x^2 = 2.$

non  $\neg \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2.$

3)  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R}$  tel  
que  $xy = 1.$

non  $\neg \exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 1$

## exercice 2:

1)

$$x^2 < a$$

$$|x| < \sqrt{a}$$

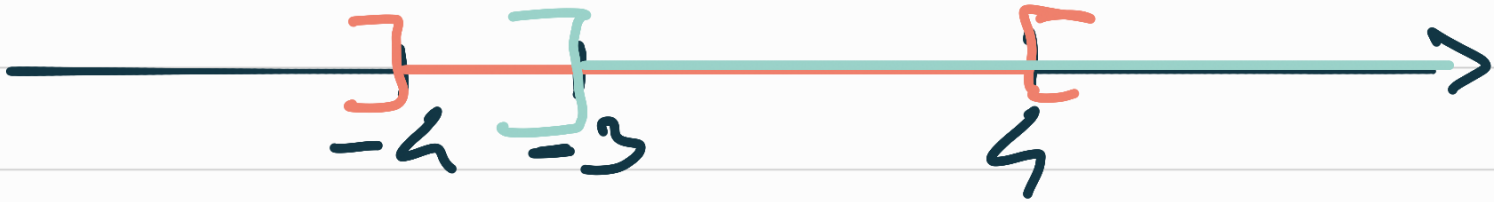
$$-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

$$\bullet A = ]-4; 4[$$

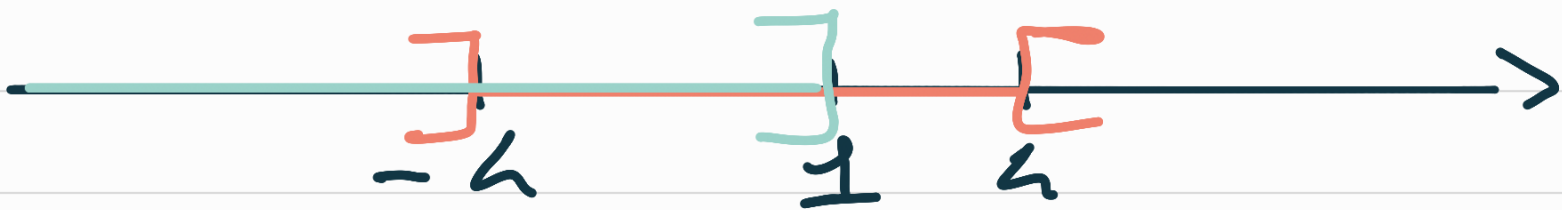
$$B = ]-3; +\infty[$$

$$C = ]-\infty; 1]$$

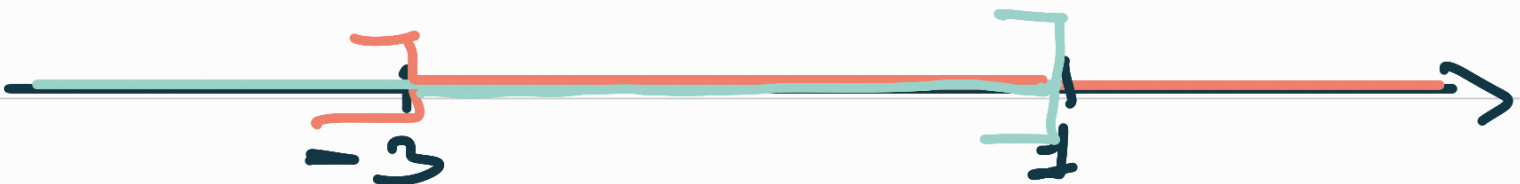
2) a)  $\underline{A} \cap \underline{B} = ]-3; 4[$



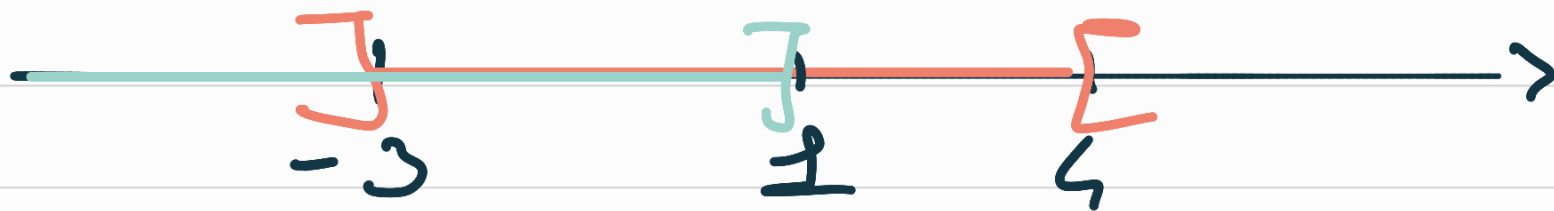
b)  $\underline{A} \cup \underline{C} = ]-\infty; 4[$



c)  $\underline{B} \setminus \underline{C} = ]1; +\infty[$



$$3) D = (\underline{A \cap B}) \setminus \underline{C}$$



$$D = ]-3; 1[$$

### exercice 3 :

1) si  $n = 2k$ , alors

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$$

donc l'affirmation est vraie.

2)  $3 \mid 9$  mais  $6 \nmid 9$ .

donc l'affirmation est fautive.

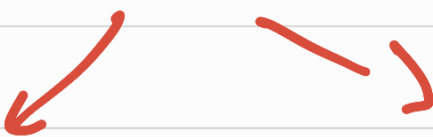
3) si  $6 \mid n$ , alors  $\exists k \in \mathbb{Z}$   
tel que  $n = 6k$ .

or  $n = 6k = 3 \times 2k$ , donc  $3 \mid n$ .

donc l'affirmation est vraie.

4) L'affirmation est vraie  
car la fonction carré est  
croissante sur  $]3; +\infty[$ .

5)

$$x^2 > a$$
$$|x| > \sqrt{a}$$

$$x < -\sqrt{a} \qquad x > \sqrt{a}$$

L'affirmation est fausse  
car il y a aussi  $x < -3$

## exercice 4:

1)  $n = 2k, k \in \mathbb{Z}.$

2)

$$a \Rightarrow b$$
$$\underbrace{\neg b}_{\text{non } b} \Rightarrow \underbrace{\neg a}_{\text{non } a} \text{ contraposée}$$

Montrons la contraposée :

Si  $n$  impair, alors  $n^2$  impair.

---

Supposons  $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}.$

$$n^2 = (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1.$$

$$= 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{Z}'} + 1$$

donc  $n^2$  impair, et donc  
 par contraposition la propriété  
 $n^2$  est pair  $\Rightarrow n$  pair est vraie