

Ensemble et logique

exercice 5:

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel

Donc $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$
et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

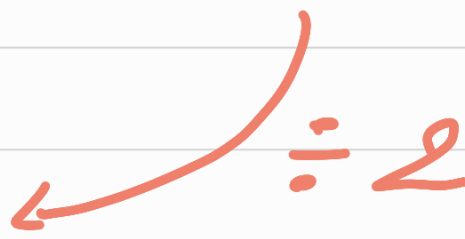
$$\Leftrightarrow 2q^2 = p^2.$$

donc p^2 est pair, et d'après
l'exercice précédent p est
pair.

$$\text{Donc } p = 2k, k \in \mathbb{Z}.$$

d'ai :

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow 2k^2 = q^2$$


donc q^2 est pair et donc q est pair.

Donc on a démontré que p et q sont tous les deux pairs.

Or $p \wedge q = 1$  contradiction

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

exercice 6 :

$$\mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

il y a l'ensemble
en plus de $\mathcal{P}(n)$.

Arithmétique

exercice 29:

1) Supposons $a|b$ et $b|c$.

$$a|b \Rightarrow b = ka, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$b|c \Rightarrow c = lb, \quad l \in \mathbb{Z}$$

d'aut :

$$c = lb = \underbrace{lk}_{\in \mathbb{Z}} a$$

donc $a|c$.

2) Suppose $a \mid b$ et $a \mid c$.

$$a \mid b \Rightarrow b = ka, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a \mid c \Rightarrow c = pa, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} bx + cy &= kax + pay \\ &= a(\underbrace{kx + py}_{\in \mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad a \mid bx + cy.$$

3) $12 : \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$30 : \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

donc Les diviseurs communs
de 12 et 30 sont $\{1, 2, 3, 6\}$.

exercice 30:

$$35 = 22 \times 1 + 13 \quad (1)$$

$$22 = 13 \times 1 + 9 \quad (2)$$

$$13 = 9 \times 1 + 4 \quad (3)$$

$$9 = 4 \times 2 + 1 \quad (4)$$

$$~~4 = 1 \times 4 + 0~~$$

$$1 \stackrel{(4)}{=} 9 - 4 \times 2$$

$$1 \stackrel{(3)}{=} 9 - (13 - 9 \times 1) \times 2$$

$$= 9 - 2 \times 13 + 9 \times 2$$

$$= 3 \times 9 - 2 \times 13$$

$$\begin{aligned}
 1 & \stackrel{(2)}{=} 3 \times (22 - 13 \times 1) - 2 \times 13 \\
 &= 3 \times 22 - 3 \times 13 - 2 \times 13 \\
 &= 3 \times 22 - 5 \times 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 & \stackrel{(1)}{=} 3 \times 22 - 5(35 - 22 \times 1) \\
 &= 3 \times 22 - 5 \times 35 + 5 \times 22 \\
 &= 8 \times 22 - 5 \times 35 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$35x + 22y = 1$$

$$(-5) \times 35 + 22 \times 8 = 1$$

$$35(x+5) + 22(y-8) = 0$$

$$22(y-8) = -35(x+5)$$

$$= 35(-x-5)$$

• D'où $22 \mid 35(-x-5)$.
 Or $22 \wedge 35 = 1$, donc d'après
 le lemme de Gauss $22 \mid -x-5$

Donc $-x-5 = 22k$, $k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow x = -22k - 5$

• D'où $35 \mid 22(y-8)$
 Or $22 \wedge 35 = 1$, donc d'après
 le lemme de Gauss $35 \mid y-8$.

Donc $y-8 = 35k$, $k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow y = 35k + 8$.

donc les solutions sont de
la forme :

$$\{(-22k - 5; 35k + 8) : k \in \mathbb{Z}\}$$