

Réurrence

exercice 4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = 2 \\ v_n = \sqrt{v_{n-1} + 3} \end{array} \right. , n \geq 2$$

$v_{n+1} = \sqrt{v_n + 3}$

Considérons la proposition
" $2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ".

Initialisation :

On a $v_1 = 2$

$$v_2 = \sqrt{v_1 + 3} = \sqrt{5}$$

et $2 \leq v_1 \leq v_2 \leq 3$

donc la proposition est
vraie au rang $n = 1$.

Hérédité: Supposons la
proposition vraie pour un
certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c.à.d. :
 $2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3$.

↳ Montre que : $2 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3$

D'après l'hypothèse récurrente :

$$2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3.$$

$$2+3 \leq v_n+3 \leq v_{n+1}+3 \leq 3+3$$

$$5 \leq v_n+3 \leq v_{n+1}+3 \leq 6$$

$$\sqrt{5} \leq \sqrt{v_n+3} \leq \sqrt{v_{n+1}+3} \leq \sqrt{6}$$

↳ car $\sqrt{5} > 2$

$$\sqrt{5} \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \sqrt{6}$$

$\sim 2,23$

$$2 \leq \sqrt{5} \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \sqrt{6} \leq 3$$

donc $2 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3$.

et donc la proposition est vraie au rang $n+1$

Conclusion: La proposition est vraie au rang $n=1$ et est héréditaire, et donc par récurrence

$$2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

exercice 5:

Considérons la proposition
" $u_n \leq -3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ".

Initialisation:

D'une part, $u_0 = -5$.

et d'autre part $u_0 = -5 \leq -3$.

donc la proposition est vraie
au rang $n = 0$.

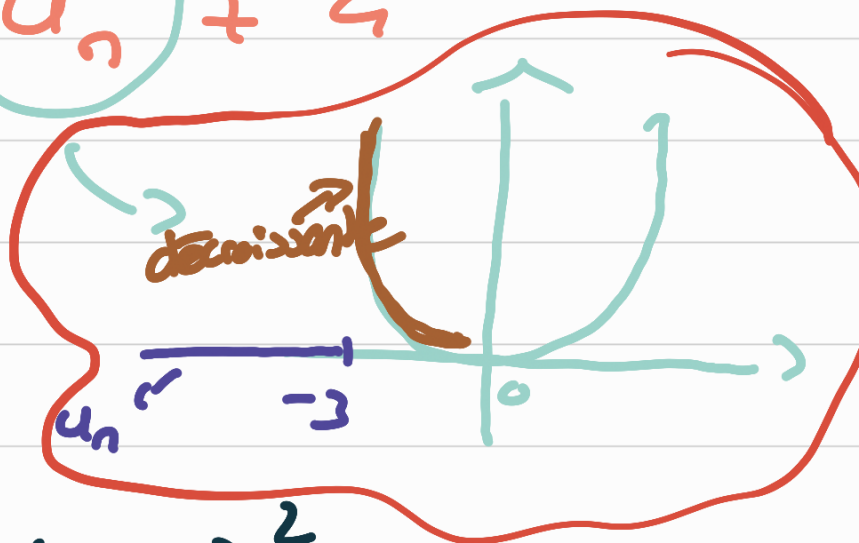
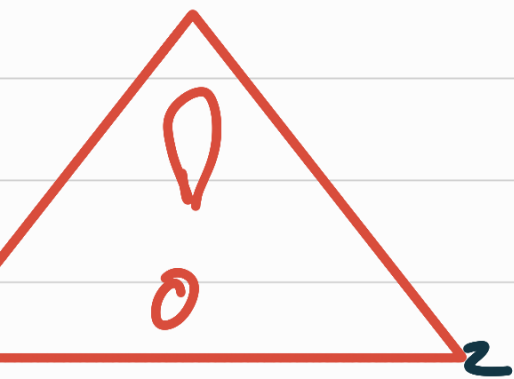
Hérédité: Supposons la proposition
vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$,
cà d $u_n \leq -3$.

$\hookrightarrow$ montrer que $u_{n+1} \leq -3$.

On a par hypothèse de récurrence :

$$u_n \leq -3$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = -u_n^2 + 4$$



$$u_n \geq (-3)^2$$

car $x \mapsto x^2$
décroissante
sur $]-\infty; -3]$

$$u_n^2 \geq 9$$

$$-u_n^2 \leq -9$$

$$-u_n^2 + 4 \leq -9 + 4$$

$$u_{n+1} \leq -5$$

$$u_{n+1} \leq -5 \leq -3$$

$$u_{n+1} \leq -3$$

donc la proposition est
vraie au rang $n+1$

Conclusion: La proposition est
vraie au rang $n=0$ et est
héréditaire, et donc par récurrence
 $u_n \leq -3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

exercice 6

$$\frac{16}{4n+20} = \frac{4 \times 4}{4 \times n + 4 \times 5}$$

$$= \frac{\cancel{4} \times 4}{\cancel{4}(n+5)}$$

$$= \frac{4}{n+5} = \frac{4}{(n+1)+4}$$

$$\Rightarrow \text{montrer que } u_{n+1} = \frac{4}{(n+1)+4}$$

exercice 3 :

Initialisation : $n = 1$

$$u_1 = 2u_0 + 5 \times 0 + 1 = 5$$

$$\hookrightarrow u_1 = 5 \geq 1 + 3 = 4$$

Hérédité : On suppose
 $u_n \geq n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^+.$

$$\hookrightarrow \text{Montrons que } u_{n+1} \geq n+1+3 \\ = n+4$$

$$u_n \geq n + 3$$

$$2u_n \geq 2(n+3)$$

$$2u_n \geq 2n + 6$$

$$2u_n + 5n \geq 7n + 6 + 5n$$

$$2u_n + 5n \geq 7n + 6$$

$$2u_n + 5n + 1 \geq 7n + 6 + 1$$

$$2u_n + 5n + 1 \geq 7n + 7$$

$$u_{n+1} \geq 7n + 7 \geq n + 4$$

Est-ce que $7n + 7 \geq n + 4$?

$$7n + 7 \geq n + 4$$

$$\Leftrightarrow 7n - n \geq 4 - 7$$

$$\Leftrightarrow 6n \geq -3$$

$$\Leftrightarrow n \geq -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 0$$

donc $u_{n+1} > 7n+7 > n+4$
car $n \geq 1 \geq 0$

et la proposition est
vraie au rang $n+1$.

exercise 9:

1) given $h(x) = f(x) - g(x)$

$$h(x) = x^2 + 2x - 3 - (-3x^2 + 10x - 3)$$

$$= x^2 + 2x - 3 + 3x^2 - 10x + 3$$

$$= 4x^2 - 8x$$

2) $h(x) = 4x^2 - 8x$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 0$$

$$= 64 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 8}{8} = 0$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 8}{8} = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
signe	signe de a	signe de $-a$	signe de a	
h	$+$	0	0	$+$
$= f-g$	$f-g \geq 0$ $f \geq g$	$f-g \leq 0$ $f \leq g$	$f-g \geq 0$ $f \geq g$	

c) Donc sur $]-\infty; 0]$ et $[2; +\infty[$, la carte E_f est au dessus de la carte E_g

Et sur $[0; 2]$, la carte E_f est au-dessous de la carte E_g .

2) a) on pose $h(x) = f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned} \bullet h(x) &= \frac{27}{x} - \frac{3x \cdot x}{x} \\ &= \frac{27 - 3x^2}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \Delta &= b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot (-3) \cdot 27 \\ &= 324 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 - 18}{2 \cdot (-3)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-0 + 18}{2 \times -3}$$

$$= -3$$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
signe $27 - 3x^2$	—	○	○	—

donc :

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$	
$27-3x^2$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	
x		$-$	ϕ	$+$		
signe de h $\overline{g \cdot g}$	$+$	ϕ	$-$	$+$	ϕ	$-$
		$g > g$	$g \leq g$	$g > g$	$g \leq g$	

donc la courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de la droite $y=3x$ sur $]-\infty; -3]$ et $[0; 3]$.

Et la courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de la droite $y=3x$ sur $[-3; 0]$ et $[3; +\infty[$.

