

Devoir - Maisen

1) a) Dans le triangle AM rectangle et isocèle en P , on a :

$$PA = PM$$

$$AM^2 = PA^2 + PM^2, \text{ par le théorème de Pythagore}$$

$$\text{donc } AM^2 = 2PM^2$$

$$\text{et } PM^2 = \frac{AM^2}{2}$$

D'où

$$PM^2 = \frac{x^2}{2}$$

• Dans le triangle MQD rectangle et isocèle en Q , on a :

$$QM = QD$$

$$MB^2 = QM^2 + QD^2, \text{ par le théorème de Pythagore.}$$

$$\text{donc } MB^2 = 2QM^2$$

$$\text{et } QM^2 = \frac{MB^2}{2}$$

D'où

$$MQ^2 = \frac{(10-x)^2}{2}$$

b) Comme les triangles PAM et MQB sont rectangles et isocèles respectivement en P et Q , alors :

$$\widehat{PMA} = 45^\circ = \widehat{QMB}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \widehat{PMQ} &= 180 - \widehat{PMA} - \widehat{QMB} \\ &= 180 - 45 - 45 \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

D'ici dans le triangle PMQ rectangle en M , par le théorème de Pythagore :

$$PQ^2 = PM^2 + MQ^2$$

$$PQ^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{(10-x)^2}{2}$$

$$= \frac{x^2 + (10-x)^2}{2}$$

$$= \frac{x^2 + 100 - 20x + x^2}{2}$$

$$= \frac{2x^2 - 20x + 100}{2}$$

$$= \frac{2x^2}{2} - \frac{20x}{2} + \frac{100}{2}$$

$$= x^2 - 10x + 50.$$

2) a) Comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, alors PQ est minimal si et seulement si PQ^2 l'est.

b) Soit $x \in]0; 10[$.

$$\bullet \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-10)}{2 \times 1}$$

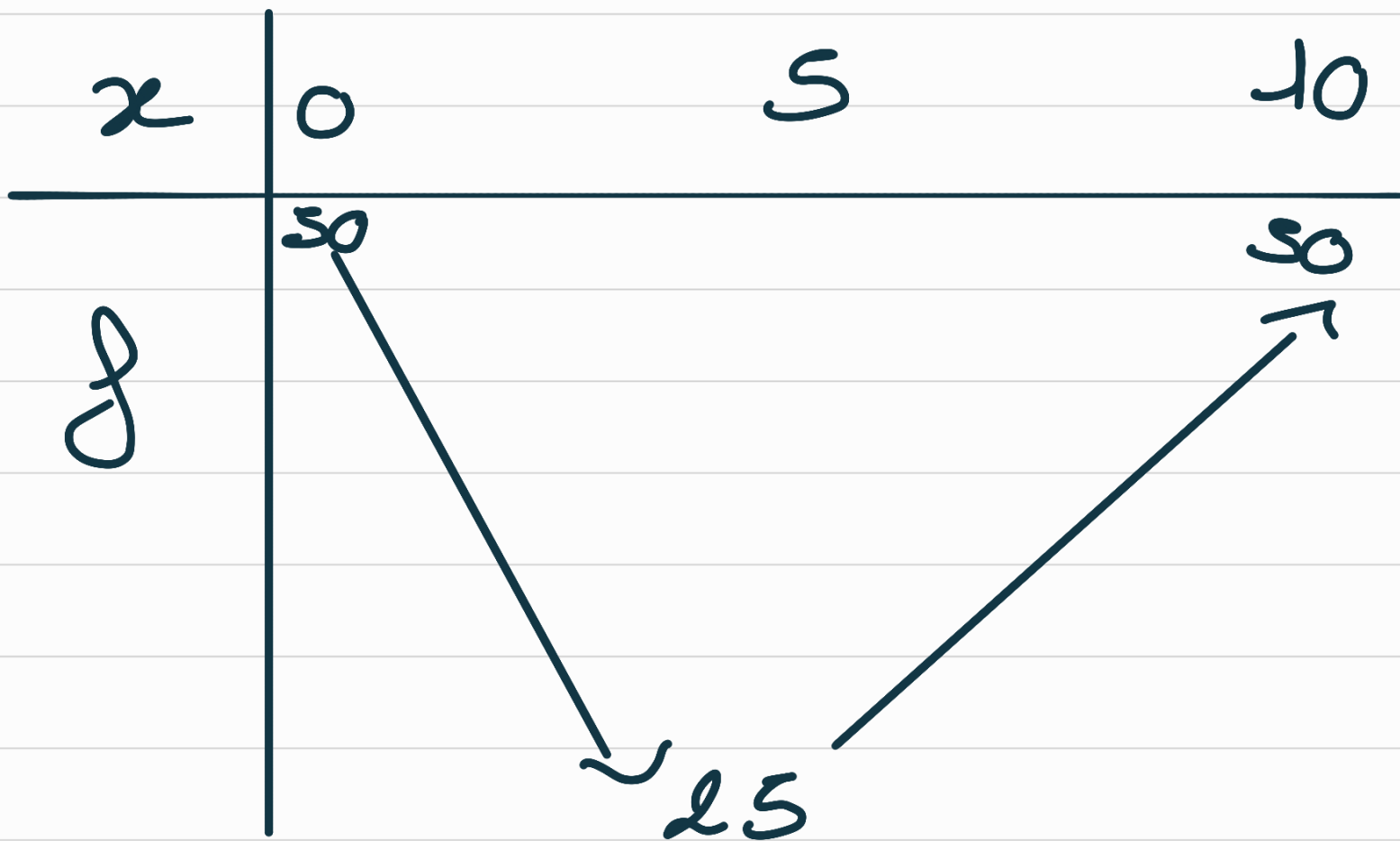
$$= \frac{10}{2}$$

$$= 5$$

$$\bullet \beta = f(5) = 5^2 - 10 \times 5 + 50$$

$$= 25 - 50 + 50 = 25.$$

d'autre Comme $a = 1 > 0$:



$$f(0) = 0^2 - 10 \times 0 + 50 = 50$$

$$f(10) = 10^2 - 10 \times 10 + 50$$

$$= 100 - 100 + 50$$

$$= 50$$

Afin de rendre la distance PQ minimale, il faut $AP = 5 \text{ cm}$

Or $AB = 10 \text{ cm}$, donc P doit être le milieu du segment $[AB]$.

3) a) Graphiquement, on voit que les valeurs de x sont $x \approx 1,68$ et $x \approx 8,32$.

$$b) PQ = 6 \Leftrightarrow PQ^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 50 = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 50 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-10)^2 - 4 \times 1 \times 14$$

$$= 100 - 56$$

$$= 44 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-10 - \sqrt{44}}{2}$$

$$= \frac{-10 - 2\sqrt{11}}{2}$$

$$= -5 - \sqrt{11} \approx -8,68$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-10 + \sqrt{44}}{2}$$

$$= \frac{-10 + 2\sqrt{11}}{2}$$

$$= -5 + \sqrt{11}$$

$$\approx 8,32$$

donc pour que $PQ = 6$,
 il faut que $Am = 5 - \sqrt{11}$ ou
 $Am = 5 + \sqrt{11}$.