

Devoir - Maison

exercice 1

1) $P_n: u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
↙ décroissante

Initialisation: $u_0 = 3$

$$u_1 = \frac{1}{3} \times 3 - 4 = -3$$

et $u_1 \leq u_0$

Hérédité:

$$u_{k+1} \leq u_k$$

$$\frac{1}{3} u_{k+1} \leq \frac{1}{3} u_k$$

$$\frac{1}{3} u_{k+1} - 4 \leq \frac{1}{3} u_k - 4$$

$$u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

2) La valeur renvoyée est $n = 7$ car $u_6 \approx -5,988$ et $u_7 \approx -5,996$.

Cette valeur représente le premier rang $\bar{n}$ partir duquel, $u_n < -5,99$.

$$\begin{aligned} 3) \text{ a) } v_{n+1} &= u_{n+1} + 6 \\ &= \frac{1}{3} u_n - 4 + 6 \\ &= \frac{1}{3} u_n + 2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \left(u_n + \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} (u_n + 6)$$

$$= \frac{1}{3} v_n.$$

donc (v_n) est géométrique
de raison $\frac{1}{3}$ et de
premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 9$.

$$b) \quad v_n = v_0 \times q^n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad u_n = v_n - 6 \quad ?$$

$$u_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 6 \quad -$$

exercice 2:

$$1) \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1^2 - 4 \times 2 \times -1$$

$$= 1 + 8$$

$$= 9 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } S = \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$$

$$2) \sin(x)' = \cos(x)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)(1 + \cos(x))$$

$$+ \sin(x) \times -\sin(x)$$

$$= \cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\text{or } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\text{et } \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

donc :

$$f'(x) = \cos(x) + \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$$

$$= \cos(x) + \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x)$$

$$= 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1.$$

3) D'après la question 1, en posant $X = \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$ on a :

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2X^2 + X - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = -1 \quad \text{ou} \quad X = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

or $x \in [0; \pi]$, et donc

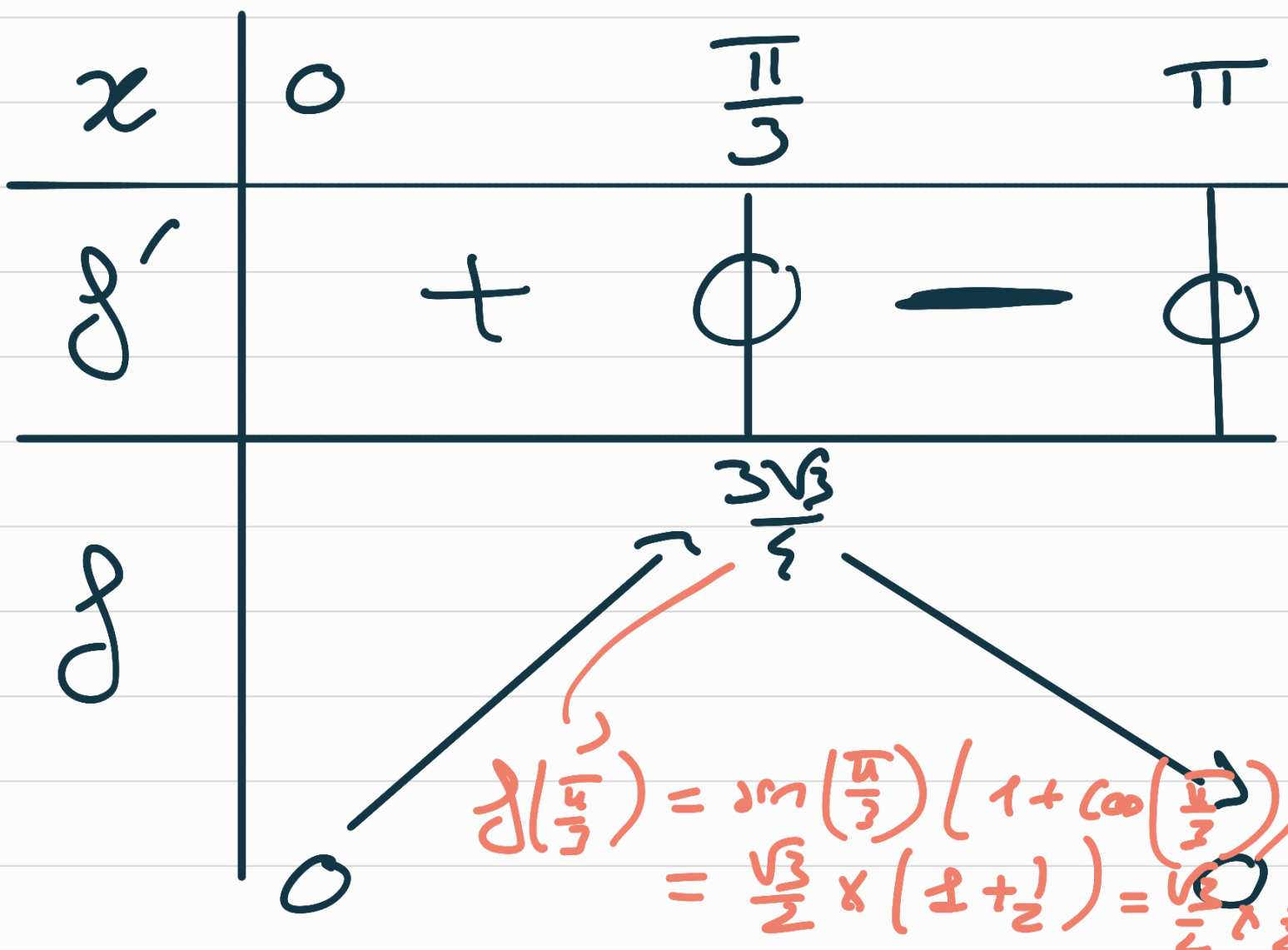
$$X = \cos(x) \in [-1; 1]$$

car $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ et $\cos$ est $\searrow$ sur $[0; \pi]$.

on a, le tableau de signe de $2x^2 + x - 1$ est :

X	-1	$\frac{1}{2}$	1
$2x^2 + x - 1$	$\emptyset$	$-$	$+$

On en déduit le tableau de variations de f :



• $2x^2 + x - 1 < 0, x \in [-1; \frac{1}{2}]$

d'aut $f'(x) < 0, x \in [\frac{\pi}{3}; \pi]$

• $2x^2 + x - 1 > 0, x \in [\frac{1}{2}; 1]$

d'aut $f'(x) > 0, x \in [0; \frac{\pi}{3}]$

Donc $0 \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$
sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

4) $y = f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{4})$