

EXERCICE 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4 \end{cases}$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, ~~déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .~~ $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$
2. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
1 - def seuil(p):  
2     u=3  
3     n=0  
4     while u>=p:  
5         u=u/3-4  
6         n=n+1  
7     return(n)
```

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(-5.99)` et indiquer ce qu'elle représente.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 6$.
- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
 - En déduire une expression explicite de v_n .

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On considère la proposition
 $P_n : "u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}"$.

Initialisation: $n = 0$

$$u_0 = 3$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}u_0 - 4 = \frac{1}{3} \times 3 - 4 \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

et $u_1 = -3 \leq u_0 = 3$

donc P_0 est vraie.

Hérédité: On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} \leq u_n$.

On veut montrer que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

On a par hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

$$\frac{1}{3} u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$$

$$\times \frac{1}{3} > 0$$

$$\frac{1}{3} u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{3} u_n - 4$$

$$-4$$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

donc hérédité vérifiée

Conclusion : . . .

Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

Montrer par récurrence que (u_n) est bornée par $\frac{1}{2}$ et 5.

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5$$

Hérédité :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5$$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} u_n \geq -\frac{1}{2} \times 5$$

$$\begin{aligned} &\times -\frac{1}{2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4} \geq -\frac{1}{2} u_n \geq -\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} &+ 3 \\ &\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4} + 3 \geq -\frac{1}{2} u_n + 3 \geq -\frac{5}{2} + 3$$

$$\frac{11}{4} \geq \underbrace{-\frac{1}{2}u_n + 3}_{u_{n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq \frac{11}{4} \leq 5$$

✓
2,75
✓

donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 5$

et P' héréditaire est vérifiée.

exercice :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = 0,92u_n + 0,3 \end{array} \right.$$

Montrer par récurrence
que :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

But : $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

