

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 22x + 12$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f .

1) À l'aide de votre calculatrice, conjecturer la position relative de la courbe C_f par rapport à l'axe des abscisses.

2) a) Montrer que -3 est une racine évidente de f .

b) Déterminer les nombres réels a , b et c tels que, pour tout nombre réel : $f(x) = (x+3)(ax^2+bx+c)$

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

d) Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

e) Conclure sur la position relative de la courbe C_f par rapport à l'axe des abscisses et préciser le(s) point(s) d'intersection.

$$\begin{aligned} 2) \quad a) \quad f(-3) &= -(-3)^3 + 3 \times (-3)^2 \\ &\quad + 22 \times (-3) + 12 \\ &= 27 + 27 - 66 + 12 \\ &= 66 - 66 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc -3 est une racine de f .

$$b) (x+3)(ax^2+bx+c)$$

$$= x \times ax^2 + x \times bx + x \times c + 3ax^2 + 3bx + 3c$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c$$

$$= ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c$$

$$f(x) = (x+3)(ax^2+bx+c)$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 + 22x + 12 = ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b+3a = 3 \\ c+3b = 22 \\ 3c = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b+3(-1) = 3 \\ \Rightarrow b-3 = 3 \\ \Rightarrow b = 3+3 = 6 \\ c = \frac{12}{3} = 4 \end{cases}$$

donc :

$$f(x) = (x+3)(-x^2+6x+4)$$

c) $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+3)(-x^2+6x+4) = 0$$

$$x+3=0 \quad \text{ou} \quad -x^2+6x+4=0$$

$x = -3$ ou $\Delta = b^2 - 4ac$
 $= 36 + 16$
 $= 52 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{52}}{2 \times (-1)}$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{52}}{2 \times (-1)}$$

$$x_1 = \frac{-6 - 2\sqrt{13}}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{13}}{-2}$$

$$= 3 + \sqrt{13}$$

$$= 3 - \sqrt{13}$$

done the solution, sort
 $-3, 3 + \sqrt{13}, 3 - \sqrt{13}$.

d) x	$-\infty$	-3	$3 - \sqrt{13}$	$3 + \sqrt{13}$	$+\infty$
$x + 3$	$-$	ϕ	$+$	$+$	$+$
$-x^2 + 6x + 4$	$-$	$+$	ϕ	$+$	$-$
δ	$+$	ϕ	$-$	$+$	$-$

donc f est positive
sur $] -\infty; -3]$ et sur $[3-\sqrt{13}; 3+\sqrt{13}]$
et f est négative sur
 $[-3; 3-\sqrt{13}]$ et $[3+\sqrt{13}; +\infty[$.

E_g est au dessus de l'axe
des abscisses pour $x \in] -\infty; -3]$
 $\cup [3-\sqrt{13}; 3+\sqrt{13}]$.

E_g est au dessous de l'axe
des abscisses pour $x \in [-3; 3-\sqrt{13}]$
 $\cup [3+\sqrt{13}; +\infty[$.

2^{es} points d'intersection,
sont $\{-3; 3-\sqrt{13}; 3+\sqrt{13}\}$.



Exercice 3 :

Soit l'équation (E_m) : $(m+3)x^2 + mx + 1 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1) Si $m = -3$, que peut-on dire de l'équation ? Résoudre alors cette équation (E_{-3}) .

2) Dans cette question, $m \neq -3$.

a) Montrer que Δ peut s'écrire : $\Delta = (m+2)(m-6)$.

b) En déduire, selon les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation (E_m) .

$$1) \quad \cancel{(-3+3)x^2} + (-3)x + 1 = 0$$

$$-3x + 1 = 0$$

donc c'est une équation
du premier degré.

$$-3x + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{-3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

$$2) a) \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= m^2 - 4x(m+3)x + 1$$

$$= m^2 - 4m + (-4) \times 3x + 1$$

$$= m^2 - 4m - 12x + 1$$

$$= \boxed{m^2 - 4m - 12}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4 \times 1 \times -12$$

$$= 64 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 1}$$

$$= -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 1}$$

$$= 6$$

$$= (m + 2)(m - 6)$$

b)

m	$-\infty$	-2	6	$+\infty$
$m+2 > 0 \Rightarrow m > -2$ $m+2$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$m-6 > 0 \Rightarrow m > 6$ $m-6$	$-$	$;$	$-$	$+$
signe $\Delta = (m+2)(m-6)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$+$

$\rightarrow$ if y a deux solutions
pour $m \in]-\infty; -2[\cup]6; +\infty[$
 $\hookrightarrow \Delta > 0$

$\rightarrow$ if y a une solution pour
 $m = -2$ et $m = 6$.
 $\hookrightarrow \Delta = 0$

$\rightarrow$ if n'y a pas de solution
pour $m \in]-2; 6[$.
 $\hookrightarrow \Delta < 0$

$$ax + b$$

$$a > 0$$

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	-	$\bigcirc$	+

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	+	$\bigcirc$	-

$$\bullet \quad x^4 - x^2 - 6 = 0$$

on pose $X = x^2$

$$X^2 - X - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$$

$$= 25 > 0$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -2$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3.$$

$$\chi_1 = x_1^2$$

$$-2 = x_1^2$$



$$\chi_2 = x_2^2$$

$$3 = x_2^2$$

$$x_2 = +\sqrt{3} \text{ or } -\sqrt{3}$$

$$\text{done} \rightarrow \Delta = \{ \sqrt{3}; -\sqrt{3} \}$$

$$x^4 - x^2 - 6 = \chi^2 - \chi - 6$$

$$= (\chi + 2)(\chi - 3)$$

$$= (x^2 + 2)(x^2 - 3)$$

$$= (x^2 + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$