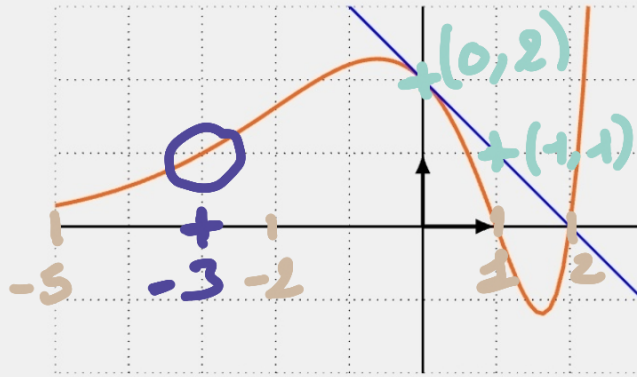


Convexité

On considère la fonction dérivable f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a également tracé la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
2. Donner une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f'(-3)$
4. La fonction f semble-t-elle convexe ou concave sur $[-5; -2]$? sur $[-2; 1]$? sur $[1; 2]$?

$f'(a) \rightarrow$ coeff. directeur de la tangente en a .

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \in T_a f$$

$$\hookrightarrow f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad f'(0) &= \frac{2 - 1}{0 - 1} \\ &= \frac{1}{-1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

$$2) \quad f(0) = 2, \quad f'(0) = -1.$$

$$y = -x + 2.$$

3) f est croissante dans
un voisinage de -3 , donc
 $f'(-3) > 0$.

Pour tout réel x , on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x , déterminer $f''(x)$
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

$$1) f'(x) = 9x^2 + 6x - 4$$

$$f''(x) = 18x + 6$$

$$2) 18x + 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{6}{18} \quad \begin{array}{l} \text{1x6} \\ \hline \text{3x3} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

donc f est convexe sur $[-\frac{1}{3}; +\infty[$.

3)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de f''	$-$	0	$+$
	f concave		f convexe

f possède un point d'inflexion en $x = -\frac{1}{3}$, car $f''(-\frac{1}{3}) = 0$.

Pour tout réel x , on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

► Afficher/Masquer la solution

$$f'(x) = 4x^3 + 4x - 3$$

$$f''(x) = 12x^2 + 4$$

$$12x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow \text{toujours vrai}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 12 \times 4$$
$$= -192$$

$$< 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe $12x^2 + 4$	+	

donc f est convexe sur $\mathbb{R}$,
pas de point d'inflexion.

$$u(x) = 1 + e^{-x}$$

$$u'(x) = -e^{-x}$$

On considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

5. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x} - 1)}{(1 + e^{-x})^3}$$

6. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe/concave.

$$5) f'(x) = - \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$\frac{u}{v} \rightarrow (u^2)'$$

$$u'(x) = -e^{-x}$$

$$= 2u'u$$

$$v'(x) = \underbrace{2x}_{2} \underbrace{e^{-x}}_{u'} \underbrace{(1 + e^{-x})}_u$$

$$f''(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 - (e^{-x})_x}{[(1+e^{-x})^2]^2}$$

$2x - e^{-x}(1+e^{-x})$

$$= \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 + 2e^{-2x}(1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^4}$$

$$= \frac{(1+e^{-x}) \left[-e^{-x}(1+e^{-x}) + 2e^{-2x} \right]}{(1+e^{-x})^4}$$

$$= \frac{-e^{-x}(1+e^{-x}) + 2e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3}$$

$$= \frac{-e^{-x}(1+e^{-x}) + 2e^{-x}e^{-x}}{(1+e^{-x})^3}$$

$$= \frac{e^{-x}[-(1+e^{-x}) + 2e^{-x}]}{(1+e^{-x})^3}$$

$$= \frac{e^{-x}(-1 - e^{-x} + 2e^{-x})}{(1+e^{-x})^3}$$

$$= \frac{e^{-x}(e^{-x} - 1)}{(1+e^{-x})^3}$$

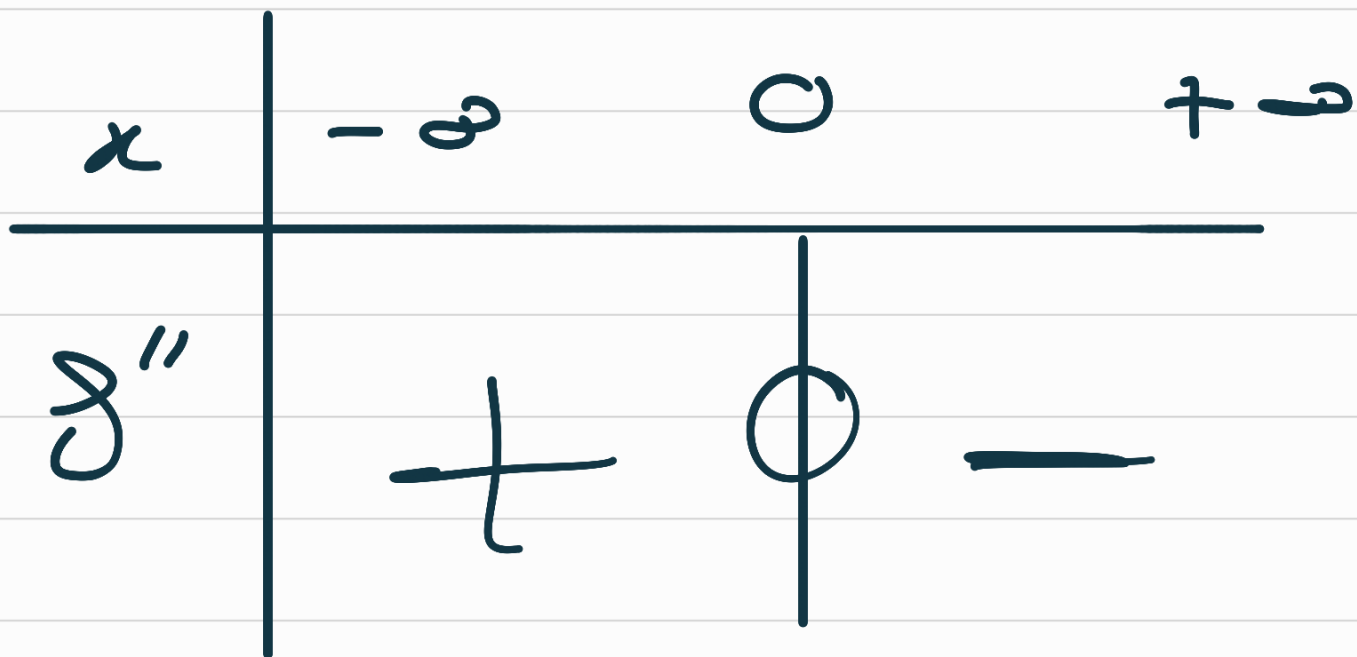
$$\bullet \quad e^{-x} - 1 \geq 0$$

$$e^{-x} \geq 1$$

$$e^{-x} \geq e^0$$

$$-x \geq 0$$

$$x \leq \frac{0}{-1} = 0$$



donc f convexe sur $]-\infty; 0]$
 et f concave sur $[0; +\infty[$.

