

Conservative vector field

→ F champ conservatif si
il existe une fonction scalaire
telle que :

$$F = \vec{\nabla} f$$

→ $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Cette fonction f se nomme
potentiel du champ de vecteurs
 F .

exemple :

$$\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 + e^y)$$

On suppose qu'il existe $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla} f(x, y).$$

Alors on a :

$$\begin{cases} 2xy = \frac{\partial f}{\partial x} \\ x^2 + e^y = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f(x, y) &= \int 2xy \, dx \\ &= x^2 y + g(y) \end{aligned}$$

$$\alpha : x^2 + g'(y) = x^2 + e^y.$$

$$\text{d'où } g'(y) = e^y \text{ et donc } g(y) = e^y.$$

Donc on pose :

$$f(x, y) = x^2 y + e^y.$$

On vérifie bien que :

$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla} f.$$

Donc $\vec{F}$ est un champ conservateur de potentiel f .

contre-exemple :

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

$$\text{curl } \vec{F} = 0$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 dt$$

$$= 1 \neq 0$$

donc $\vec{F}$ n'est pas conservateur.

exercice 1 :

1) $\vec{F}(x, y) = (xy^2, yx^2)$.

On suppose avoir $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
telle que :

$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla} f$$

d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = yx^2$$

donc : $f(x, y) = \int yx^2 dy$.

$$f(x, y) = \frac{y^2 x^2}{2} + g(x)$$

$$\text{or: } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{2} \cancel{x} \cancel{2x} + g'(x)$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2.$$

$$\text{donc: } y^2 x + g'(x) = xy^2.$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0$$

$$\text{et } g(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{On pose: } f(x, y) = \frac{y^2 x^2}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{et on vérifie bien } \vec{F} = \vec{\nabla} f.$$

2) On suppose avoir une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y \end{cases}$$

d'où $f(x, y) = \int e^x y \, dx$
 $= e^x y + g(y).$

or $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + g'(y) = e^x + 2y.$

d'où $g'(y) = 2y$ et

donc $g(y) = y^2$

on pose alors : $f(x,y) = e^x y + y^2$

on vérifie bien que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

4) On suppose avoir $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
telle que :

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 \end{cases}$$

$$\text{d'où: } f(x, y, z) = \int x^2 dy$$

$$= x^2 y + g(x, z)$$

$$\alpha \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{\partial g(x, z)}{\partial x}$$

$$\parallel$$

$$2xy + z^3$$

$$d'au : \quad \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = z^3$$

$$\text{et donc } g(x, z) = \textcircled{xz^3} + h(z)$$

$$\text{or } \frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 + h'(z)$$

$$\parallel$$

$$3xz^2$$

$$\text{donc } h'(z) = 0$$

et donc $h(z) = k$, $k \in \mathbb{R}$

on pose :

$$f(x, y, z) = x^2 y + x z^3 + k.$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

on vérifie bien que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.