

Matrices

• Méthode 1 : Inverse

bi3maths : exercices corrigés.

wolfram : IA maths.

$$\bullet \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

① Calculer $M^2 + 2M$.

$$M^2 + 2M = 3I_3.$$

②

En déduire que M
est inversible. Donner M^{-1} .

On suppose M est inversible.

on a : $M^2 + 2M = 3I_3$.

$$\times M^{-1} \left(M + 2I_3 = 3M^{-1} \right) \times M^{-1}$$

on pose : $M^{-1} = \frac{1}{3} (M + 2I_3)$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

analyse.

déj. matrice inversible

De plus :

$$M \times M^{-1} = I_3 = M^{-1} \times M$$

synthèse

Donc M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 + 2M = 3I_3$$

$$\Leftrightarrow M^2 + 2M - 3I_3 = O_{3(\mathbb{R})}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on pose $P(X) = X^2 + 2X - 3$

on a $P(M) = O_{3(\mathbb{R})}$
polynôme annulateur de M .

$$M^2 + 2M = 3I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{3}(M^2 + 2M)$$

$$I_3 = M \times \underbrace{\frac{1}{3}(M + 2I_3)}_{\lambda \in \mathbb{Q}_3(\mathbb{R})}$$

donc M est inversible et
on pose :

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M + 2I_3)$$

$$\mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{D}^* : x \xrightarrow{\text{inverse}} \frac{1}{x}$$

$$\hookrightarrow x \times \frac{1}{x} = 1 \rightarrow \text{unité}$$

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \xrightarrow{\text{inverse}} \frac{1}{M}$$

$\hookrightarrow M$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M \times B = I_3 = B \times M$$

et alors $B = M^{-1}$.