

— Exercice 1 —

2,5 points

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 3$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$ .

Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère la proposition  $P_n$  : " $u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}$ ",  
 $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Initialisation : D'une part  $u_0 = 3$

D'autre part,  $\frac{9 - 8 \times 0}{3 + 8 \times 0} = \frac{9}{3} = 3$ .

donc  $P_0$  est vraie.

Hérédité : On considère  $n \in \mathbb{N}$   
tel que  $u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}$ .

On veut montrer que :

$$u_{n+1} = \frac{9 - 8(n+1)}{3 + 8(n+1)} = \frac{9 - 8n - 8}{3 + 8n + 8} = \frac{1 - 8n}{11 + 8n}$$

on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$$

$$= \frac{\frac{9-8n}{3+8n} - 2}{2 \times \frac{9-8n}{3+8n} + 5}$$

$$= \frac{\frac{9-8n - 2(3+8n)}{3+8n}}{\frac{2(9-8n) + 5(3+8n)}{3+8n}}$$

$$= \frac{\frac{9-8n - 6 - 16n}{3+8n}}{\frac{-18 - 16n + 15 + 40n}{3+8n}}$$

$$= \frac{\frac{3 - 24n}{3+8n}}{\frac{33 + 24n}{3+8n}}$$

$$= \frac{3-24n}{\cancel{3+8n}} \times \frac{\cancel{3+8n}}{33+24n}$$

$$= \frac{3-24n}{33+24n}$$

$$= \frac{\cancel{3}(1-8n)}{\cancel{3}(11+8n)}$$

$$= \frac{1-8n}{11+8n}$$

done  $P_{n+1}$  est vraie.

Conclusion: ...

— Exercice 2 —

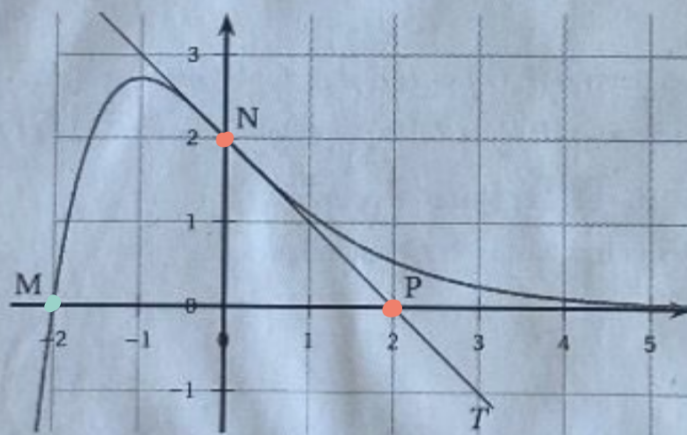
5,5 points

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative  $C_f$  de la fonction  $f$  ;
- la tangente  $T$  à  $C_f$  en son point  $N(0; 2)$  ;
- le point  $M(-2; 0)$  appartenant à  $C_f$  et  $P(2; 0)$  appartenant à la tangente  $T$ .

On précise que la fonction  $f$  est strictement positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle  $] -\infty; -1]$ .



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. (a) Donner  $f(0)$ . (b) Déterminer  $f'(0)$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
3. La fonction  $f$  est-elle convexe sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier.

1) a)  $f(0) = 2$

b)  $f'(0) = \frac{2 - 0}{0 - 2} = \frac{2}{-2} = -1.$

2) Graphiquement l'équation  $f(x) = 0$  admet comme unique solution sur  $\mathbb{R}$   $x = -2$ .

En effet,  $f$  étant strictement croissante sur  $]-\infty; -1]$  et strictement positive sur  $[0; +\infty[$ , alors sa courbe coupe l'axe des abscisses que au point d'abscisse  $x = -2$ .

3) On remarque que la tangente est au-dessus de la courbe  $C_f$  sur  $[-2; 0]$ , donc sur cet intervalle  $f$  est concave.

Donc  $f$  n'est pas convexe sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction  $f$  est de la forme :  $f(x) = (ax + b)e^{\lambda x}$ , où  $a$ ,  $b$  et  $\lambda$  sont des constantes réelles. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que  $b = 2$ .

1 sur 3

TSpé

2. Justifier que  $-2a + b = 0$  puis en déduire la valeur de  $a$ .
3. Déterminer une expression algébrique de  $f$ . Justifier.

### Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ .

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de  $f$ ,  $f'(x)$ .
2. Dresser le tableau de variations complet de  $f$ . Justifier.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0. Justifier.

5 points

1) D'une part,  $f(0) = 2$ .  
D'autre part,  $f(0) = (a \cdot 0 + b)e^0$   
 $= b$ .

donc  $b = 2$

2) On sait que l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = 0$  est  $x = -2$

$$\text{or } f(x) = 0 \Leftrightarrow (ax+b)e^{\lambda x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2a+b)e^{-2\lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2a+b = 0.$$

car  $e^{-2\lambda} > 0$ .

De plus,  $b = 2$ .

$$\text{Donc } -2a+b = 0$$

$$\Leftrightarrow -2a+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = 1}.$$

3) on a déjà :

$$f(x) = (x+2) \underbrace{e^{\lambda x}}_{v' = \lambda e^{\lambda x}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{\lambda x} + (x+2)\lambda e^{\lambda x} \\ = e^{\lambda x}(1 + \lambda(x+2))$$

$$\text{or } f'(0) = -1.$$

$$\text{et } f'(0) = e^0(1 + \lambda(0+2)) \\ = 1 + 2\lambda$$

$$\text{d'où } 1 + 2\lambda = -1$$

$$2\lambda = -2$$

$$\lambda = -1.$$

$$\text{donc } f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

3. Déterminer une expression algébrique de  $f$ .

### Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+2)e^{-x}$ .

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de  $f$ ,  $f'(x)$ .
2. Dresser le tableau de variations complet de  $f$ . Justifier.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0. Justifier.

5 points

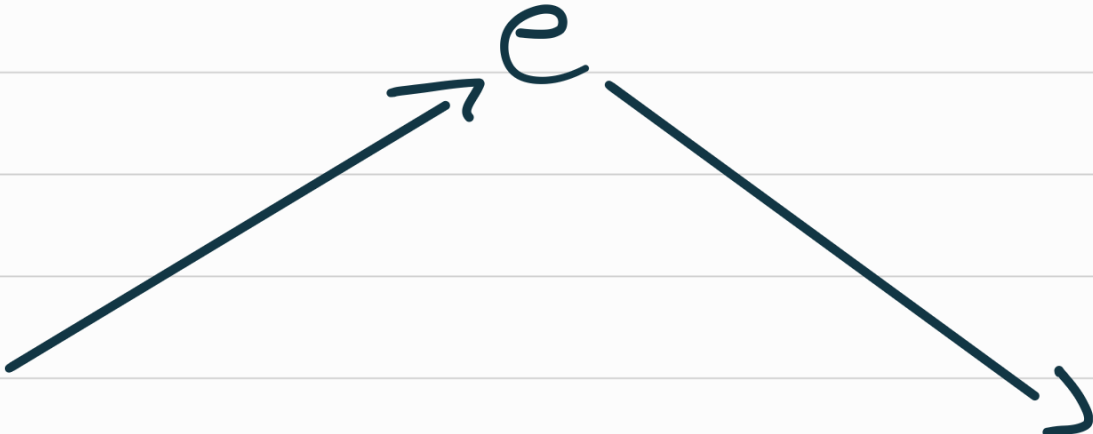
$$\begin{aligned} 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= e^{-x} + (x+2) \times (-1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(1 + (x+2) \times (-1)) \\ &= e^{-x}(1 - x - 2) \\ &= e^{-x}(-x - 1). \end{aligned}$$

$$2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow -x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -x > 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{-1} \\ = -1$$

| $x$  | $-\infty$                                                                           | $-1$       | $+\infty$ |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|
| $f'$ | $+$                                                                                 | $\bigcirc$ | $-$       |
| $f$  |  |            |           |

$$f(-1) = (-1 + 2) e^{-1-1}$$

$$= e$$

3)  $T_0 f: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$f'(0) = e^0(-0-1) = -1$$

$$f(0) = (0+2)e^0 = 2.$$

done  $T_0 f: y = -1 \times x + 2$

$$T_0 f: y = -x + 2$$