

Exercice 1 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + 4n + 6$.
Montrer par récurrence que $u_n = 2n^2 + 4n + 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Considérons la proposition
" $u_n = 2n^2 + 4n + 7, \forall n \in \mathbb{N}$ ".

Initialisation : D'une part, $u_0 = 7$

D'autre part, $2 \times 0^2 + 4 \times 0 + 7 = 7$.

donc la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, càd
 $u_n = 2n^2 + 4n + 7$.

Montrons que $u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 4(n+1) + 7$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 + 7 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 + 4n + 4 + 7 \\ &= 2n^2 + 8n + 13 \end{aligned}$$

①

$$u_{n+1} = u_n + 4n + 6.$$

②

$$= 2n^2 + 4n + 7 + 4n + 6$$

$$= 2n^2 + 8n + 13$$

donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La proposition est vraie au rang $n=0$ et est héréditaire à partir de ce rang, donc par le principe de récurrence $u_n = 2n^2 + 4n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 5}$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2 \leq v_n \leq 3$.

Considérons la proposition
" $2 \leq v_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ".

Initialisation: D'une part, $v_1 = 2$

D'autre part $2 \leq 2 \leq 3$

donc la proposition est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité: Supposons la proposition vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c-à-d $2 \leq v_n \leq 3$.

Montrons que $2 \leq v_{n+1} \leq 3$.

on a : $2 \leq v_n \leq 3$.

$$7 \leq v_n + 5 \leq 8$$

$$\sqrt{7} \leq \sqrt{v_n + 5} \leq \sqrt{8}$$

car la
fonction
racine
est
croissante
sur $\mathbb{R}$.

$$2 \leq \sqrt{7} \leq v_{n+1} \leq \sqrt{8} \leq 3.$$

donc $2 \leq v_{n+1} \leq 3$.

La proposition est vraie
au rang $n+1$.

Conclusion : La proposition
est vraie au rang $n=1$ et
est héréditaire à partir de
ce rang, donc par le principe
de récurrence $2 \leq v_n \leq 3$,
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 Dériver les fonctions dont les expressions sont données ci-dessous :

1. $f(x) = e^{3x^2+6x+1}$

2. $g(x) = 5(e^x + 3)^7$

3. $h(x) = 8\sqrt{5x^2 + x + 1}$

4. $a(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$

1) $f(x) = e^{3x^2+6x+1}$
 $= e^{u(x)}$

avec $u(x) = 3x^2 + 6x + 1$.
 $u'(x) = 6x + 6$

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$
$$= (6x + 6) e^{3x^2+6x+1}.$$

$$2) \quad g(x) = 5(e^x + 3)^7$$

$$= 5 \times u(x)^7 \quad \rightarrow u^n$$

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

avec $u(x) = e^x + 3$; $u'(x) = e^x$

$$g'(x) = 5 \times 7 \times e^x \times (e^x + 3)^6$$

$$= 35 e^x (e^x + 3)^6$$

$$3) \quad h(x) = 8 \sqrt{5x^2 + x + 1}$$

$$= 8 \sqrt{u(x)} \quad \rightarrow (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

avec $u(x) = 5x^2 + x + 1$
 $u'(x) = 10x + 1$

$$h'(x) = \frac{10x + 1}{2\sqrt{5x^2 + x + 1}}$$

$$4) \quad a(x) = \frac{\cos(x) \rightarrow u}{x^2 + 1 \rightarrow v}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u(x) = \cos(x) \qquad u'(x) = -\sin(x)$$

$$v(x) = x^2 + 1 \qquad v'(x) = 2x$$

$$a'(x) = \frac{-\sin(x)(x^2 + 1) - \cos(x) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= - \frac{(x^2 + 1)\sin(x) + 2x\cos(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+6)e^x$.

$u \times v$

1. Dériver la fonction f .
2. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f . On ne demande pas de faire apparaître les images dans le tableau de variation.

$$\begin{aligned} 1) \quad u(x) &= 2x+6 & u'(x) &= 2 \\ v(x) &= e^x & v'(x) &= e^x \end{aligned}$$

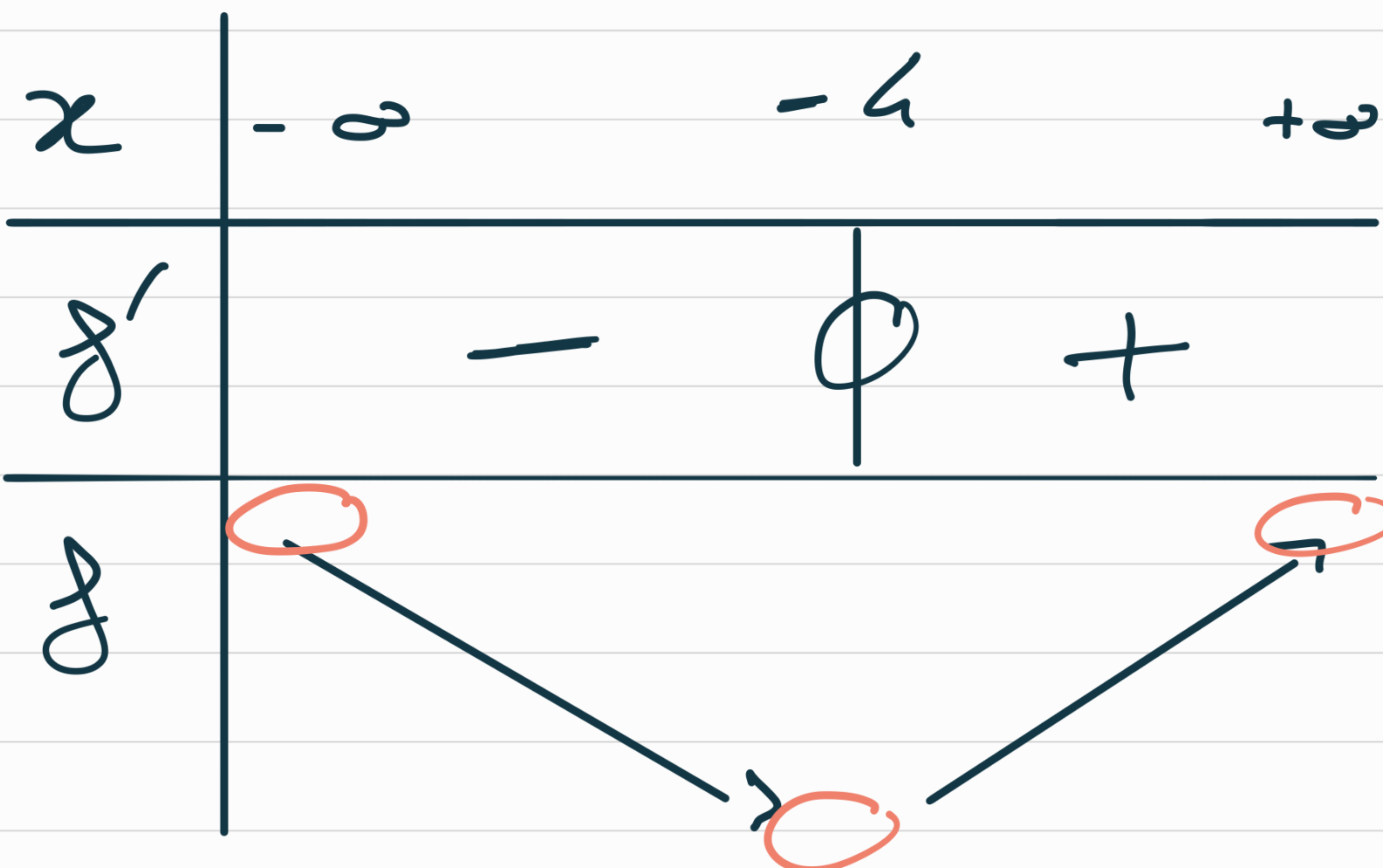
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^x + (2x+6)e^x \\ &= e^x(2 + 2x+6) \\ &= e^x(2x+8). \end{aligned}$$

$$2) \quad f'(x) = \underline{e^x}_{>0} (2x+8)$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -8$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{2} = -4$$



Exercice 5 On considère la fonction g définie sur $[0 ; \pi]$ par $g(x) = -\sin(x) + \frac{1}{2}x$.

1. Dériver la fonction g .
2. Étudier le signe de g' et en déduire les variations de g . On ne demande pas de faire apparaître les images dans le tableau de variation.

1) $g'(x) = -\cos(x) + \frac{1}{2}.$