

Puissances

$$A^2 = A \times A$$

• Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

alors $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$

• Si $A^2 = O_3$, alors $A^n = O_3$
pour $n \geq 2$.

• Calculer A, A^2, A^3 .



remarquer une forme
qui se répète.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow A^n = \begin{pmatrix} n & n^2 \\ n^2 & n \end{pmatrix}$$

on pose P_n propriété :

$$P_n : " A^n = \begin{pmatrix} n & n^2 \\ n^2 & n \end{pmatrix}, \forall n \geq 1 "$$

$\Rightarrow$ prouve par récurrence.

- Binôme de Newton:

→ On a $AB = BA$.

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k A^{n-k}.$$

$$I^n = I$$

exercice 1:

1) PDQ

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 4 & -6 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 4 & -6 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= A.$$

$$\text{done } PDQ = A.$$

$$2) \quad QP = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

done $QP = I.$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = (PDP)^n$$

$$= \underbrace{P \overset{=I}{D} \overset{=I}{P} P \overset{=I}{D} \overset{=I}{P} \dots P \overset{=I}{D} \overset{=I}{P}}_{n \text{ fois}}$$

$$= P \underbrace{D I D I \dots I D}_{n \text{ fois}} P$$

$$= P D^n P.$$

exercice 2:

$$1) P^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= P$$

$$Q^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Q.$$

$$PQ = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= O_3$$

$$QP = O_3.$$

$$2) A = aP + bQ$$

$$\Leftrightarrow aP + bQ = a \times \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ b \times \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2a & -a & -a \\ -a & 2a & -a \\ -a & -a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a+b & -a+b & -a+b \\ -a+b & 2a+b & -a+b \\ -a+b & -a+b & 2a+b \end{pmatrix}$$

donc $A = aP + bQ$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a+b & -a+b & -a+b \\ -a+b & 2a+b & -a+b \\ -a+b & -a+b & 2a+b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = \frac{1}{3}(2a+b) \\ 2 = \frac{1}{3}(-a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 2a+b \\ 6 = -a+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ -a + b = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 9 \\ -a + b = 6 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ -a + 3 = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

done :

$$A = -3P + 3Q.$$

$$3) A = -3P + 3Q.$$

$$A^n = (-3P + 3Q)^n \\ = 3^n (-P + Q)^n$$

$$A^n = 3^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-P)^k Q^{n-k}$$

car $PQ = QP$

$$= 3^n \left(\binom{n}{0} (-P)^0 Q^n + \binom{n}{1} \underbrace{(-P)Q}_{PQ=QP}^{n-1} \right. \\ \left. + \binom{n}{2} \underbrace{(-P)^2 Q^{n-2}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n} (-P)^n Q^0} \right)$$

$$\forall 1 \leq k \leq n-1, \quad P^k Q^{n-k}$$

$$= \underbrace{PQ}_{=Q} \times P^{k-1} Q^{n-k-1}$$

$$= O_3$$

$$\text{donc } A^n = 3^n (Q^n + (-P)^n) \\ = 3^n Q^n + (-3)^n P^n$$

Montrer que $Q^n = Q$.

- $n = 1$, $Q^1 = Q$
- Si $Q^n = Q$, alors on a :

$$Q^{n+1} = Q^n \times Q$$

$$= Q \times Q$$

$$= Q^2$$

$$= Q$$

donc par récurrence immédiate,
 $Q^n = Q$. De même par P .

$$\text{donc } A^n = (-3)^n P + 3^n Q.$$