

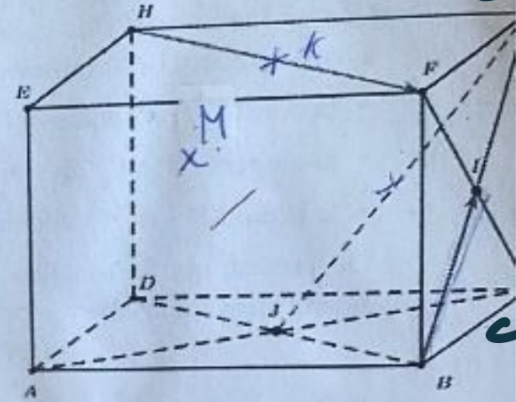
— Exercice 3 —

Dans cet exercice, on n'utilisera pas de repère de l'espace.

ABCDEFGH est le parallélépipède représenté ci-contre.

I est le milieu de [BC] et J est le milieu du segment [DB].

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB}$$



- Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires.
- Soit K le milieu du segment [HF] et M le point défini par : $2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA}$.
 - Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AK}$ et placer le point M.
 - Démontrer que les points E, M et C sont alignés.

$$\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HF}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad \overrightarrow{HF} &= \overrightarrow{DB} \\
 &= 2 \overrightarrow{JB} \\
 &= 2 \overrightarrow{JG} + 2 \overrightarrow{GB} \\
 &= -2 \overrightarrow{GJ} + 2 \overrightarrow{IB} \\
 &= -2 \overrightarrow{GJ} - 2 \overrightarrow{BI}
 \end{aligned}$$

et $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{HF}$
sont coplanaires.

$$\vec{GJ} = \vec{GB} + \vec{BJ}$$

$$= 2 \vec{IB} + \frac{1}{2} \vec{FH}$$

$$= -2 \vec{BI} - \frac{1}{2} \vec{HF}$$

2) a) $\vec{AM} = \vec{AK} + \vec{KM}$

$$\vec{AM} = \vec{AK} + \frac{1}{2} \vec{MA}$$

$$\vec{AM} = \vec{AK} - \frac{1}{2} \vec{AM}$$

d'après $\frac{3}{2} \vec{AM} = \vec{AK}$

$$\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AK}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{EM} &= \vec{EA} + \vec{AM} \\ &= \vec{EA} + \frac{2}{3} \vec{AK} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{EC} &= \vec{EA} + \vec{AC} \\ &= \vec{EA} + 2\vec{AJ} \\ &= \vec{EA} + 2\vec{EK} \end{aligned}$$

$$= \vec{EA} + 2\vec{EA} + 2\vec{AK}$$

$$= 3\vec{EA} + 2\vec{AK}$$

$$= 3\vec{EM}$$

donc $\vec{EC} = 3\vec{EM}$ et les points E, C, M sont alignés.

Dans un repère de l'espace, on donne : $A(3; 0; 5)$, $B(0; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ et $C(1; 0; 2)$.

1. Démontrer que les points A , B et C définissent un plan.
2. Donner un couple de vecteurs directeurs de ce plan.
3. On donne les points $E(2; 0; \frac{1}{2})$ et $F(1; -\frac{3}{2}; -1)$. Démontrer que la droite (EF) est parallèle au plan (ABC) .

1) $\vec{AB}(-3; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$
 $\vec{AC}(-2; 0; -3)$

$$\bullet \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \bullet \frac{0}{-\frac{1}{2}} = 0$$

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaire et les points définissent un plan.

2) un couple de vecteurs directeurs de ce plan est $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

3) $\vec{EF}(-1; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$.

$$\vec{EF} = x \vec{AB} + y \vec{AC}.$$

$$(-1; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}) = x(-3; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}) + y(-2; 0; -3)$$

$$\begin{cases} -1 = -3x - 2y \\ -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}x \\ -\frac{3}{2} = -\frac{9}{2}x - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -3 - 2y \\ x = 1 \\ -\frac{3}{2} = -\frac{9}{2}x - 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \\ -\frac{3}{2} = -\frac{9}{2} \times 1 - 3 \times (-1) \end{cases}$$

$-\frac{3}{2} = -\frac{9}{2} + 3 \quad \checkmark$

donc :

$$\vec{EF} = \vec{AB} - \vec{AC}$$

et la droite (EF) est
parallèle au plan (ABC) .

4. BONUS : Soit $N(-1; -\frac{1}{2}; 3)$. Le point N appartient-il au plan (ABC) ?

$$L, \vec{NA} = x \vec{AB} + y \vec{AC} ?$$
