

Matrices

Puissances

Exercice 3 :

On considère les matrices carrées A et B définies par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 3I_3$

1- a) Calculer B , B^2 et B^3

b) En déduire B^k pour tout entier k supérieur ou égal à 3.

2- Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $A^n = 3^n \left(I + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18}B^2 \right)$

1) a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B^k = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, k \geq 3$$

$\hookrightarrow B$ est nilpotente d'indice 3

$$2) A = B + 3I_3.$$

Soit $n \geq 2$.

$$A^n = (B + 3I_3)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (3I_3)^{n-k},$$

car $AB = BA$.

$$= 3^n I_3 + n B 3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} B^2 3^{n-2}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

$$n! = n(n-1)! \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$= 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right)$$

• Trace / Transposée

• $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * \\ * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, alors

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

$$\text{E, } A \in \mathcal{M}_{\text{tr}}^n \quad B \in \mathcal{M}_{\text{tr}}^n$$

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A).$$

$$\bullet (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

• Déterminant / Inverse

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_n(K)$, on dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que :

$$AB = I_n = BA \text{ et } B = A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{com}(A)^T.$$

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} \overset{+}{\Delta_{11}} & \overset{-}{\Delta_{12}} & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

A inversible

$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } A$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\}$$

$\Leftrightarrow A^T$ inversible

$\Leftrightarrow$ il existe un polynôme annulateur de A dont 0 n'est pas racine

$\Leftrightarrow 0$ n'est pas racine du polynôme minimal de A .

$P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(A) = 0_{n \times n}$, alors P est un polynôme annulateur de A .

polynôme minimal = le polynôme annulateur de A de degré minimal.

exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$.

↳ calculs.

En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

$$\text{↳ } A^2 = 2I_3 - A$$

$$A^2 + A = 2I_3$$

$$\frac{1}{2} (A^2 + A) = I_3.$$

$$A \times \frac{1}{2} (A + I_3) = I_3.$$

donc par définition A est
inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2} (A + I_3)$$
$$= \dots$$

$$A^2 = 2I_3 - A$$

$$A^2 + A - 2I_3 = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

donc on pose :

$$P(X) = X^2 + X - 2$$

qui est un polynôme annulateur
de A .

or $P(0) = -2$, donc 0 n'est
pas racine et. A est inversible.

De plus,

$$A^2 + A - 2I_3 = O_3$$

$$\times A^{-1} \left(\right) \times A^{-1}$$

$$A + I_3 - 2A^{-1} = O_3$$

$$\text{d'où } A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3).$$

exercice : Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A I_3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$L_2 - L_1$
 $L_3 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \\ -L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ -2L_3 \\ \\ \end{array}$$

A^{-1}

remarque : Comatrice

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{+} & - & + \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & +2 & -1 \\ +2 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -4 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{Com}(A)^T$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

exercice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculer le rang de B .

$$\text{rg}(B) = \dim(\text{Im}(B)).$$

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hence $\text{rg}(B) = 3.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

hence $\text{rg}(A) = 2.$