

Espaces Vectoriels

- $0_E \notin F \Rightarrow F$ n'est pas un sev de E .
- $\mathbb{R}^n \mid \mathcal{B} = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$
 $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\mathbb{R}_n[X] \mid \mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, \dots, X^n\}$
 $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$
L, $\mathbb{R}[X], \dim \mathbb{R}[X] = +\infty$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mid \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.
 $\mathcal{B} = \{E_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \right\}$$

exercice :

- $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x+y=0, \\ z+t=0 \end{matrix}\}$

Montrer que E_2 sev de $\mathbb{R}^4$.

- Est ce que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$?

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

donc $0_{\mathbb{R}^4} \in E_2$.

- Soit $(x, y, z, t) \in E_2$ et $(x', y', z', t') \in E_2$.

$$(x, y, z, t) + (x', y', z', t') = (x + x', y + y', z + z', t + t')$$

$$\rightarrow (x + x') + (y + y') = \underbrace{(x + y)}_{= 0 \text{ car } (x, y, z, t) \in E_2} + \underbrace{(x' + y')}_{= 0 \text{ car } (x', y', z', t') \in E_2}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\rightarrow (z + z') + (t + t') = (z + t) + (z' + t')$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\text{donc } (x, y, z, t) + (x', y', z', t') \in E_2$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y, z, t) \in E_2$.

$$\lambda(x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$$

$$\rightarrow \lambda x + \lambda y = \lambda \underbrace{(x + y)}_{=0} = 0$$

$$\rightarrow \lambda z + \lambda t = \lambda \underbrace{(z + t)}_{=0} = 0$$

donc $\lambda(x, y, z, t) \in E_2$.

! Donc E_2 est un sev de $\mathbb{R}^4$.

Donner une base de E_2
et en déduire la dimension

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -t \end{cases}$$

donc on a :

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils sont libre.

Une base de E_2 est
 $\mathcal{B} = \{ (-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1) \}.$

et $\dim E_2 = 2.$

$$E_2 = \ker(f) \text{ où } f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ z+t \end{pmatrix}$$

linéaire

donc E_2 est un s.v. de $\mathbb{R}^4$.

- $E_2 = \{ (iv + w, 0, 2v - w) : v, w \in \mathbb{C} \}$

- Est ce que $O_{\mathbb{C}} \in E_2$?

on prend $v = O_{\mathbb{C}}, w = O_{\mathbb{C}}$

et $(O_{\mathbb{C}}, O_{\mathbb{C}}, O_{\mathbb{C}}) \in E_2$.

- Soit $(iv + w, 0, 2v - w) \in E_2$
et $(iv' + w', 0, 2v' - w') \in E_2$

$$(iv + w, 0, 2v - w) + (iv' + w', 0, 2v' - w')$$

$$= (iv + w + iv' + w', 0, 2v - w + 2v' - w')$$

$$= (i(\underbrace{v + v'}_{\in \mathbb{C}}) + (\underbrace{w + w'}_{\in \mathbb{C}}), 0, 2(\underbrace{v + v'}_{\in \mathbb{C}}) - (\underbrace{w + w'}_{\in \mathbb{C}}))$$

$\in E_2$.

donc $(iv + w, 0, 2v - w) + (iv' + w', 0, 2v' - w') \in E_2$

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $(i\nu + \omega, 0, 2\nu - \omega) \in E_2$.

$$\lambda(i\nu + \omega, 0, 2\nu - \omega)$$

$$= (\lambda i\nu + \lambda\omega, 0, 2\lambda\nu - \lambda\omega)$$

$$= (\underbrace{i(\lambda\nu)}_{\in \mathbb{C}} + \underbrace{\lambda\omega}_{\in \mathbb{C}}, 0, \underbrace{2(\lambda\nu)}_{\in \mathbb{C}} - \underbrace{\lambda\omega}_{\in \mathbb{C}})$$

$$\in E_2. \text{ Donc } \lambda(i\nu + \omega, 0, 2\nu - \omega) \in E_2$$

Donc E_2 est un sev de $\mathbb{C}^3$.

$$(i\nu + \omega, 0, 2\nu - \omega)$$

$$= \nu(i, 0, 2) + \omega(1, 0, -1)$$

$$\text{donc } E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{or } (i, 0, 2) \text{ et } (1, 0, -1)$$

ne sont pas colinéaires et
donc $\mathcal{P} = \{(1, 0, 2), (1, 0, -1)\}$
est une base de E_2 .

Donc $\dim E_2 = 2$.

exercice :

- $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = P'(1) = 0\}$

- $0_{\mathbb{R}_2[x]}(1) = 0 = 0'_{\mathbb{R}_2[x]}(1)$

donc $0_{\mathbb{R}_2[x]} \in E_3$.

- Soit $P, Q \in E_2$

$$\rightarrow (P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0$$

$$\rightarrow (P+Q)'(1) = P'(1) + Q'(1) = 0$$

donc $P+Q \in E_2$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in E_2$.

$$(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$(\lambda P)'(1) = \lambda P'(1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

donc $\lambda P \in E_2$.

Donc E_2 est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P \in E_3$.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$P'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a \\ b=-2a \\ a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } P(x) &= ax^2 - 2ax + a \\ &= a(x^2 - 2x + 1) \\ &= a(x-1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E_S = \text{Vect} \{ (x-1)^2 \}$$

$$\text{et une base de } E_S \text{ est } \mathcal{B} = \{ (x-1)^2 \} \text{ et dim } E_S = 1.$$

exercice :

$$\mathcal{F} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)\}$$

Montrer que $\mathcal{F}$ base de $\mathbb{R}^3$
et écrire $(6, 2, -7)$ dans
cette base.

$$\bullet \text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

↳ génératrice

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que
 $\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 2) + \lambda_3(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 2) + \lambda_3(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3; \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) \\ = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et
la famille est libre.

Donc la famille forme une
base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \neq 0$$

donc $\tilde{\mathcal{F}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$(6, 2, -1) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 2) + \gamma(1, 2, 3).$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 2\beta + 3\gamma).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 6 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 6 \\ \gamma = -4 \\ \beta + 2\gamma = -13 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 15 \\ \gamma = -4 \\ \beta = -5 \end{cases}$$

donc :

$$(6, 2, -1) = 15(1, 1, 1) - 5(1, 1, 2) - 4(1, 2, 3)$$

et les coordonnées de $(6, 2, -1)$ dans $\mathcal{F}$ sont $(15, -5, -4)$.

exercice :

$$F \oplus G = E$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0_E\}. \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$$
$$G = \text{Vect} \{(1, 2, 1)\}.$$

or $F = \text{Vect} \{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$
et les vecteurs ne sont pas
colinéaires.

$$\text{donc} \quad \dim G + \dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\rightarrow 1 + 2 \times 2 + 1 = 6 \neq 0.$$

$$\text{donc } (1, 2, 1) \notin F.$$

$$\text{et donc } F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

$$\text{Donc } F \oplus G = \mathbb{R}^3.$$

$$\textcircled{2} F = \text{Vect} \{ (1, 2, -1), (1, 0, 1) \}$$
$$G = \text{Vect} \{ (0, 1, 2) \}.$$

$$\text{donc } \dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\rightarrow (0, 1, 2) = 2(1, 2, -1) + \lambda(1, 0, 1)$$
$$= (2 + \lambda; 2\lambda; -2 + \lambda)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + \beta = 0 \\ 2\alpha = 1 \\ 2 - \beta = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1 \neq 2 \end{array} \right.$$

donc $(0, 1, 2) \notin F$, et
 $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

remarque : on peut montrer que
 $\text{Vect} \{ F, G \}$ base de $\mathbb{R}^3$.

$$③ \quad F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \}$$

$$G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 0 \\ \text{et } x - 2y - z = 0 \}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ -\frac{10}{3}z = 0 \end{cases} \quad L_3 - \frac{4}{3}L_2$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

donc $F \cap G = \{0, \mathbb{R}^3\}$

et $F = \text{Vect} \{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

$$G = \text{Vect} \{(1, -1, 0)\}$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

et $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.