

Application Linéaire

• Endomorphisme = Linéaire
+ $f: E \rightarrow E$

• isomorphisme = Linéaire +
bijective

bijective = injective + surjective

$\hookrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$

En dimension finie avec $\dim E = \dim F$

$\hookrightarrow f$ bijective

$\Leftrightarrow f$ injective

$\Rightarrow f$ surjective

$\hookrightarrow f$ surjective si $\text{Im}(f) = F$

- automorphisme = endomorphisme + bijective.
-

exercice :

$$f(x, y) = (x + y, x - 2y, 0).$$

Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda(x, y) + \mu(x', y'))$$

$$= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

$$= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - 2\lambda y - 2\mu y', 0)$$

$$(\lambda y + \mu y', 0)$$

$$= \lambda(x+y, x-2y, 0) + \mu(x'+y', x'-2y', 0)$$

$$= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y').$$

donc f est linéaire

$${}_B f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow e_1 \\ \rightarrow e_2 \\ \rightarrow e_3 \end{matrix}$$

$\downarrow$ $f(e_1)$ $\downarrow$ $f(e_2)$

$$J: E \rightarrow F.$$

avec $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_p\}$ base E

$$\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\} \text{ base } V$$

$$\Pi_{\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'} \mathcal{I} = \begin{pmatrix} \vdots \\ u(e_1) \dots u(e_p) \end{pmatrix}$$

$$\in \mathbb{C} / \mathbb{R} \quad (\mathbb{R})$$

$$(x, y) \in \ker(f)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \end{cases}$$

done $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ et
 f injective.

exercice :

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

• u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \\ u(e_2) = 3e_2 \\ u(e_3) = -4e_1 + 4e_3 \end{array} \right.$$

$$M_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow e_1 \\ \rightarrow e_2 \\ \rightarrow e_3 \end{array}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $u(e_1) \quad u(e_2) \quad u(e_3)$

• Dase der nayan:

$$(x, y, z) \in \ker(u)$$

$$\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}} u \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

remarque: $(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x e_1 + y e_2 + z e_3) \\ &= x u(e_1) + y u(e_2) + z u(e_3) \\ &= x(-2e_1 + 2e_3) + y(3e_2) \\ &\quad + z(-4e_1 + 4e_3) \\ &= e_1(-2x - 4z) + e_2(3y) \end{aligned}$$

$$+ e_3(2x + 4z)$$

donc $u(x, y, z) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

donc $\ker(u) = \text{Vect}\{(-2, 0, 1)\}$

• Base $\text{Im}(u)$:

①
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\sim$
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\dim(u) = 2$ et

une base de $\text{Im}(u)$ est $\{(-2, 0, -4), (0, 3, 0)\}$.

② Comme $\dim \ker(u) = 1$,
alors par le théorème du
rang on a $\text{rg}(u) = 2$.

Or une famille génératrice
de $\text{Im}(u)$ est $\{u(e_1), u(e_2), u(e_3)\}$

et $u(e_3) = 2u(e_2)$.

Donc une base de $\text{Im}(u)$
est $\{u(e_1), u(e_2)\}$

exercice :

$$u : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

$$P \longmapsto P + (1-x)P'$$

-
- Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[x]$,
 $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) + (1-x)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda P + Q + (1-x)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(P + (1-x)P') + (Q + (1-x)Q') \\ &= \lambda u(P) + u(Q). \end{aligned}$$

donc u est linéaire, et
donc u est un endomorphisme

• Base de $\text{Im}(u)$

$\text{Im}(u)$ est engendrée par la famille $\{u(1), u(x), u(x^2), u(x^3)\}$.

$$u(1) = 1 \quad u(x^2) = -x^2 + 2x$$

$$u(x) = 1 \quad u(x^3) = -2x^3 + 3x^2$$

$$M_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{matrix}$$

$u(1) \quad u(x) \quad u(x^2) \quad u(x^3)$

u linéaire symétrique $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}} u$
symétrique

et A symétrique si $A^T = A$.

or $u(x) = u(1)$, donc
une base de $\text{Im}(u)$ est
 $\{u(1), u(x^2), u(x^3)\}$ et $\text{rg}(u) = 3$.

• Base du noyau

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

$$P \in \ker(u) \Leftrightarrow u(P) = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$$

$$\Leftrightarrow P + (1-x)P' = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ & + (1-x)(3ax^2 + 2bx + c) \\ & = 0. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow aX^3 + bX^2 + cX + d + 3aX^2 + 2bX + c - 3aX^3 - 2bX^2 - cX = 0$$

$$\Leftrightarrow -2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + (d + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ 3a - b = 0 \\ 2b = 0 \\ d + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ c = -d \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $P(x) = d(1 - x)$

et une base du $\ker(u)$
est $\mathcal{B} = \{1 - x\}$ et $\dim(\ker(u)) = 1$

- $\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}_3[x]$

on pose $\left\{ 1, -x^2 + 2x, -2x^3 + 3x^2, 1-x \right\}$.

Comme les polynômes sont tous de degré différents, alors la famille forme une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Donc $\mathbb{R}_3[x] = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$

exercice: $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$M_{B_B} u = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$

(f_1, f_2) base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_3 + e_1 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2) \end{array} \right. \right.$$

- Ecrire la matrice de u dans les nouvelles bases.
-

$$P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$e'_1 \quad e'_2 \quad e'_3$

$$Q_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

$f'_1 \quad f'_2$

$$M_{\mathcal{B}'_E} u = Q^{-1} M_{\mathcal{B}_E} u P$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$