

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1 .

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n , par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1 .

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $a_n \geq 3n - 1$.

d. En déduire la limite de la suite (a_n) .

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n) .

a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

1) $u_1 = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}$.

2) a) $a_0 = \frac{2}{2 - 1} = 2$

$$a_1 = \frac{5/4}{\frac{5}{4} - 1} = 5$$

$$b) a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{\frac{2u_n + 1}{u_{n+2}}}{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}} - 1}$$

$$= \frac{\frac{2u_n + 1}{u_{n+2}}}{\frac{2u_n + 1}{u_{n+2}} - \frac{(u_{n+2})}{u_{n+2}}}$$

$$= \frac{\frac{2u_n + 1}{u_{n+2}}}{\frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_{n+2}}} = \frac{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}}{\frac{u_n - 1}{u_{n+2}}}$$

$$= \frac{2u_n + 1}{\cancel{u_n + 2}} \times \frac{\cancel{u_n + 2}}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}.$$

$$\text{or } 3a_n - 1 = \frac{3u_n}{u_n - 1} - 1$$

$$= \frac{3u_n}{u_n - 1} - \frac{(u_n - 1)}{u_n - 1}$$

$$= \frac{3u_n - u_n + 1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}.$$

donc $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c) "Considérons la proposition
 $a_n > 3n - 1, n \geq 1$ ".

Initialisation : $a_1 = 5$.

$$3 \times 1 - 1 = 2$$

donc $a_1 > 3 \times 1 - 1$, et

La proposition est vraie
au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons la
propriété vraie par un
certain rang n , cād
 $a_n > 3n - 1$.

Montrons que la proposition
est vraie au rang $n+1$, cād
 $a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1 = 3n + 2$.

on a: $a_n \geq 3n - 1$

$$3a_n \geq 3(3n - 1)$$

$$3a_n \geq 9n - 3$$

$$3a_n - 1 \geq 9n - 3 - 1$$

$$a_{n+1} \geq 9n - 4$$

$$9n - 4 \geq 3n + 2$$

$$\Leftrightarrow 9n - 3n \geq 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 6n \geq 6 \Leftrightarrow n \geq 1.$$

donc $a_{n+1} \geq 3n-4 \geq 3n+2$
et la proposition est vraie
au rang $n+1$.

d) On a : $a_n \geq 3n-1$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n-1 = +\infty$.

et par le théorème de
comparaison on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

3) a)

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

$$(u_n - 1) a_n = u_n$$

$$u_n a_n - a_n = u_n$$

$$u_n a_n - u_n = a_n$$

$$u_n (a_n - 1) = a_n$$

$$u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}.$$

$$b) \quad u_n = \frac{\cancel{a_n} \times 1}{\cancel{a_n} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{a_n} = 1,$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$$

par quotient de limites.

exercice 2 :

1)
$$v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6$$
$$= 4,8 \cdot \times 1000$$

La population au 1^{er} janvier 2026 sera de 4800

2)
$$f'(x) = -0,05 \times 2x + 1,1$$
$$= -0,1x + 1,1.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -0,1x + 1,1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -0,1x > -1,1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-1,1}{-0,1}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 11$$

donc

x	0	11	$+\infty$
f'		$+$	ϕ
			$-$

donc f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.

3) Initialisation : $v_0 = 6$

et $v_1 = 4,8$.

$$2 \leq v_1 = 4,8 \leq v_0 = 6 \leq 6 \quad \checkmark$$

Hérédité : stable, ...

on a :

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$$

or comme f est croissante
sur $[0; 11]$, et $[2; 6] \subset [0; 11]$.

$$f(2) \leq \underbrace{f(v_{n+1})} \leq \underbrace{f(v_n)} \leq f(6)$$

$$2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 4,8 \leq 6$$

car $v_{n+1} = f(v_n)$, $\forall n \geq 1$

donc $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6$

décroissante.



4) on a montré que (u_n) est décroissante et elle est minorée par 2, donc la suite (u_n) est convergente vers une limite l .