

Devoir - Raisen

exercice 1:

$$1) \quad u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}$$

$$2) \quad a) \quad a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2$$

$$a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{5/4}{5/4 - 1}$$

$$= \frac{5/4}{1/4} = 5.$$

$$b) a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}}{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}} - 1}$$

$$= \frac{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}}{\frac{2u_{n+1} - (u_{n+2})}{u_{n+2}}}$$

$$= \frac{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}}{\frac{2u_{n+1} - u_n - 2}{u_{n+2}}}$$

$$= \frac{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}}{\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}}$$

$$= \frac{2u_n + 1}{\cancel{u_n + 2}} \times \frac{\cancel{u_n + 2}}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}.$$

$$\text{Or: } 3a_n - 1 = 3 \times \frac{u_n}{u_{n-1}} - 1$$

$$= \frac{3u_n - (u_{n-1})}{u_{n-1}}$$

$$= \frac{3u_n - u_{n-1}}{u_{n-1}}$$

$$= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

$$\text{donc } a_{n+1} = 3a_n - 1.$$

c) Bala o o o

Initialisation : D'un côté, $a_1 = 5$

De l'autre côté, $3 \times 1 - 1 = 2$

et donc $a_1 \geq 3 \times 1 - 1$.

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : H.R : $a_k \geq 3k - 1$

Montrons que $a_{k+1} \geq 3(k+1) - 1$
 $\geq 3k + 2$

$$a_k \geq 3k - 1$$

$$3a_k \geq 3(3k - 1) = 9k - 3$$

$$3a_k - 1 > 9k - 3 - 1 = 9k - 4$$

donc $a_{k+1} > 9k - 4$

on a : $9k - 4 \geq 3k + 2$

$$\Leftrightarrow 9k - 3k \geq 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 6k \geq 6$$

$$\Leftrightarrow k \geq 1, \text{ toujours vrai.}$$

car $k \in \mathbb{N}^*$.

donc $a_{k+1} > 9k - 4 \geq 3k + 2$

et P_{k+1} est vraie.

BaBa ooc

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty.$

et par somme de limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 1 = +\infty$$

or $a_n > 3n - 1, \forall n \geq 1.$

Donc par le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$

3) a) $a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$

$$\Leftrightarrow a_n (u_n - 1) = u_n$$

$$\Leftrightarrow a_n u_n - a_n = u_n$$

$$\Leftrightarrow a_n u_n - u_n = a_n$$

$$\Leftrightarrow u_n (a_n - 1) = a_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}.$$

b) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

et $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$

$$= \frac{\cancel{a_n} \times 1}{\cancel{a_n} (1 - \frac{1}{\cancel{a_n}})}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$$

cc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pm 1}{a_n} = 0$ et donc

par somme de limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pm - \frac{\pm 1}{a_n} = \pm.$$

Par quotient de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm.$$

4) a) La fonction renvoie le plus petit entier n tel que $u_n - 1 \leq p$ et la valeur du terme u_n associé.

b) La valeur de n est 6.