Fiche 4

exercice 1 :

3) $y'' - 4y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique :

$$r^2 - 4r + 4 = 0 = (r-2)^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 1\times 4$$
$$= 0$$

donc $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$.

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5) $y'' - 2y' + 10y = 0$

$r^2 - 2r + 10 = 0$

$\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$

$z_1 = \dfrac{2-6i}{2} = 1 - 3i$

$z_2 = \underbrace{1}_{\alpha} + \underbrace{3}_{\beta} i$

$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\right)$

donc $y(t) = e^{t}\left(C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)\right)$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y(0) = C_1 = 0$

$$y(t) = e^{t} \times C_2 \sin(3t)$$

$$y'(t) = e^{t} \times C_2 \sin(3t) + e^{t} \times 3C_2 \cos(3t).$$

$$y'(0) = 3C_2 = 1 \iff C_2 = \frac{1}{3}.$$

Donc l'unique solution de l'équation est : $y(t) = \frac{1}{3} e^{t} \sin(3t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

exercice 2 :

1) okay.

2) on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{t-1}{t} & \frac{1-2t}{t} \end{pmatrix}$

on a bien : $Y' = AY$.

3) $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

<u>identité d'Abel</u> : $W' = -pW$

avec $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$

on a $w'(t) = -\frac{1-2t}{t} w(t)$.

$$= \frac{2t-1}{t} w(t)$$

et $w(t) = C e^{\int \frac{2t-1}{t} dt}$, $\underline{C \in \mathbb{R}}$

or $\int \frac{2t-1}{t} dt$

$$= \int 2 - \frac{1}{t} \, dt$$

$$= 2t - \ln(t)$$

d'où $w(t) = C e^{2t - \ln(t)}$

$$= C\frac{e^{2t}}{\epsilon}$$

Donc $w(t) = C\dfrac{e^{2t}}{\epsilon}$.

or $w(t) = e^t y_2'(t) - e^t y_2(t)$.

$$= e^t\left(y_2'(t) - y_2(t)\right)$$

$$C\frac{e^{2t}}{\epsilon} = \left(y_2'(t) - y_2(t)\right)e^t$$

$$\boxed{C\frac{e^{t}}{\epsilon} = y_2'(t) - y_2(t).}$$

- $y_{2,H}(t) = C_1 e^{\epsilon}$, $C_1 \in \mathbb{R}$
- on pose $y_2(t) = C_1(t)\, e^t$.

cns: $C_1'(t)\, e^t = \dfrac{c\, e^t}{t}$.

$$C_1'(t) = \frac{c}{t}$$

$$C_1(t) = c\ln(t).$$

et $\quad y_2(t) = c\ln(t)\, e^t, \; c \in \mathbb{R}$

On pose $\quad y_2(t) = \ln(t)\, e^t.$

indépendante de y_1.

4) Les solutions générales sur $]0;+\infty[$ sont de la forme :

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 \ln(t) e^t,$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

exercice 3 :

$$y'' + y = t^2.$$

- $y'' + y = 0$ $\quad r^2 + 1 = 0$

$r^2 = -1.$

$r = \pm i$

$y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

on pose : $P(t) = at^2 + bt + c$

$P'(t) = 2at + b$

$P''(t) = 2a.$

P est solution $\Longleftrightarrow$

$$2a + at^2 + bt + c = t^2$$

$$\Leftrightarrow at^2 + bt + (2a+c) = t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

donc une solution particulière est $P(t) = t^2 - 2$.

Donc les solutions :

$$y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + t^2 - 2.$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

exercice 6 :

1) $$y^{(3)} - 2y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$(r-1)(\underbrace{r^2 - r - 6}_{\Delta}) = 0$$

$$(r-1)(r+2)(r-3) = 0$$

3) $$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

$$R = r^2 \Rightarrow R^2 + 2R + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (R+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow R = \pm i$$

Feuille 5

exercice 1 :

1) $y^{(3)} + y'' + y' + y = e^{-t}$

e^{r}

$r^3 + r^2 + r + 1$

$= (r+1)(r-i)(r+i)$

-1 racine

$\hookrightarrow \quad y_p(t) = C t e^{-t}$

exercice 4 :

1) $\bullet\ r^2 - 2r + 1$

$= (r-1)^2$

$y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

on pose $y_p(t) = Ct^2e^t$

$y_p'(t) = C2te^t + Ct^2e^t$

$= Ce^t(2t + t^2)$

$y_p''(t) = Ce^t(2t+t^2) + Ce^t(2+2t)$

$y_p'' - 2y_p' + y_p$

$$= Ce^t \left[\underbrace{t^2 + 4t + 2}_{y''} \underbrace{- 4t - 2t^2}_{-2y'} + \underbrace{t^2}_{y} \right]$$

$$= Ce^t \times 2.$$

donc $Ce^t \times 2 = e^t$

$$\iff C \times 2 = 1$$

$$\iff C = \frac{1}{2}.$$

Donc $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^t$

$$+ \frac{1}{2} t^2 e^t,$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

exercice 5 :

1) $y(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$.

$$y'(t) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n t^{n-1}$$

$$y''(t) = \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

$$\varepsilon (t^2+1) \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) a_n t^{n-2} + (t^2-1) \sum_{n \geqslant 1} n a_n t^{n-1} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon (t^2+1) \sum_{n \geqslant 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$$

$$+ (t^2-1) \sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} t^n = 1$$

$$\Longleftrightarrow t^3 \sum_{n\geqslant 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$$

$$+ t \sum_{n\geqslant 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$$

$$+ t^2 \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} t^n$$

$$- \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} t^n = 1$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^{n+3}$$

$$+ \sum_{n\geqslant 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^{n+1}$$

$$+ \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} t^{n+2}$$

$$- \sum (n+1) a_{n+1} t^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 3} (n-1)(n-2)\, a_{n-1}\, t^n$$

$$+ \sum_{n\geq 1} (n+1)\, n\, a_{n+1}\, t^n$$

$$+ \sum_{n\geq 2} (n-1)\, a_{n-1}\, t^n$$

$$- \sum_{n\geq 0} (n+1)\, a_{n+1}\, t^n = 1.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \underbrace{\left[\quad\text{———}\quad \right]}_{=0} t^n = 0$$