

Convexité

Exercice 1

4,5 points

Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f sans se soucier des intervalles sur lesquelles elle est dérivable

1) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

2) $f(x) = (x^2 + 2x - 9)^4$

3) $f(x) = \frac{e^{-3x}}{3x - 5}$

1) $\sqrt{u} \Rightarrow u(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ u'(x) = 4x - 3 \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}$$

2) $f'(x) = 4(2x + 2)x$

$$(x^2 + 2x - 9)^3$$

$$3) f'(x) = \frac{-3e^{-3x}(3x-5)}{(3x-5)^2}$$

$$= \frac{-3e^{-3x}(3x-4)}{(3x-5)^2}$$

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = (3 - x)e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation

c) Etudier la convexité de la fonction f

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

a) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

b) Déterminer une équation de la tangente en 1 à la courbe C_g

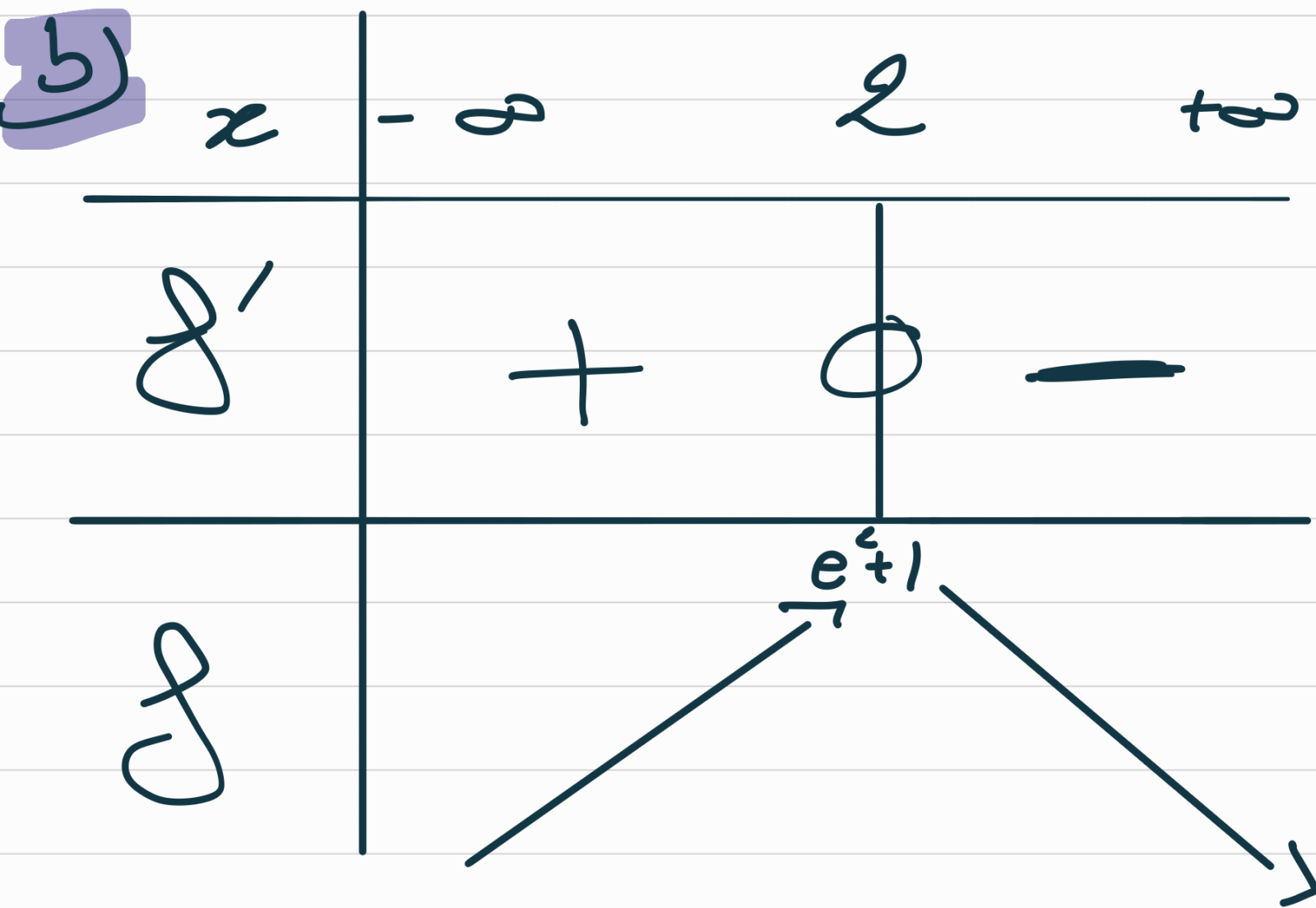
c) Etudier la convexité de g et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe

d) En déduire le signe de la fonction h définie sur $]-\infty; 4]$ par $h(x) = g(x) - (3x - 2)$.

On justifiera correctement la réponse.

1) a)
$$f'(x) = -e^x + e^x(3-x)$$
$$= e^x(2-x)$$

$$f''(x) = e^x(-x+2) - e^x$$
$$= e^x(1-x)$$



c) $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0$
 $\Leftrightarrow x < 1$

donc f est convexe sur $]-\infty; 1[$ et f est concave sur $]1; +\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

- a) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.
- b) Déterminer une équation de la tangente en 1 à la courbe C_g
- c) Etudier la convexité de g et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe
- d) En déduire le signe de la fonction h définie sur $]-\infty; 4]$ par $h(x) = g(x) - (3x-2)$.

On justifiera correctement la réponse .

a)	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
	g'	-	0	+	-
	g				

b) $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$

$$y = 3(x - 1) + 1$$

$$y = 3x - 2$$

c) $g''(x) = -6x + 6$

g est convexe sur $]-\infty; 1]$
et g est concave sur
 $[1; +\infty[$.

Le point d'inflexion est 1.

Suites

Exercice 2 : Application

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. Soit f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$.

Étudier le sens de variation de la fonction f .

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > u_{n+1} \geq 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) sachant qu'elle vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$1) f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2} > 0$$

donc f est croissante
sur $] -2; +\infty[$.

2) Initialisation:

$$u_0 = 5 \quad u_1 = \frac{19}{7} \approx 2,7$$

donc $u_0 > u_1 > 1$.

Hérédité: ~~~~~
~~~~~

on a par hypothèse de récurrence:

$$u_n > u_{n+1} > 1$$

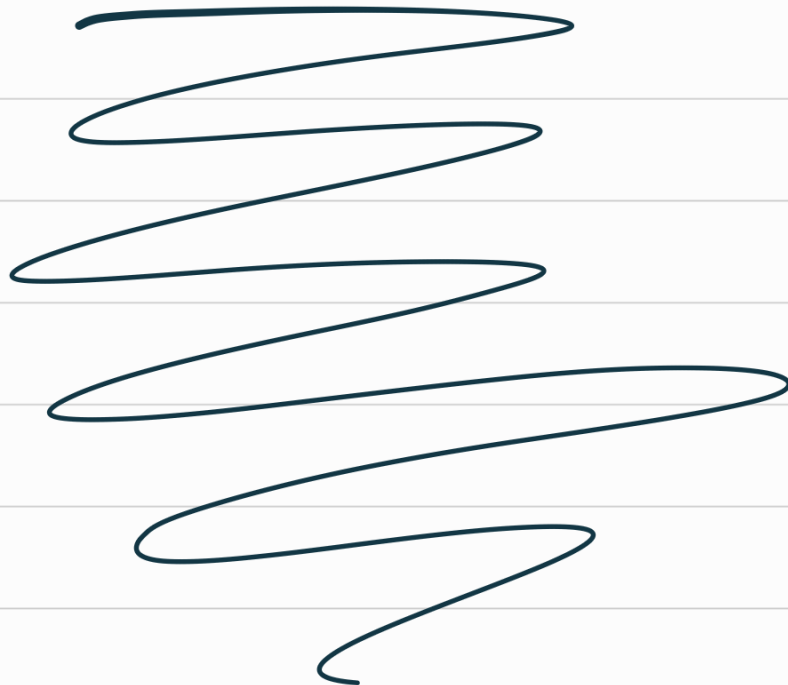
or  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ , et  $f$  est croissante sur  $I = ]-\infty; +\infty[$ .

$$f(u_n) > f(u_{n+1}) > f(1)$$



Si  $f$  est décroissante  
alors on change le  
sens des inégalités

$$u_{n+1} > u_{n+2} \geq 1$$



## Exercice 11

*Un exercice de bac parfois subtil!*

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$  sur l'intervalle  $[-\frac{1}{3}; 0]$ .

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , et par  $u_0 = -\frac{1}{6}$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-\frac{1}{3}; 0]$ .

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 > u_n > -\frac{1}{3}$ .

$$1) f'(x) = 2x + \frac{2}{3}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

donc  $f$  est croissante  
sur  $[-\frac{1}{3}; 0]$ .

2) Initialisation:  $u_0 = -\frac{1}{6}$

$$\text{et } 0 > -\frac{1}{6} > -\frac{1}{3}$$

Hérédité :

on a par hypothèse :

$$0 > u_n > -\frac{1}{3}.$$

$$\text{or } u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et  $f$  est croissante sur  $[-\frac{1}{3}; 0]$

$$f(0) > f(u_n) > f(-\frac{1}{3})$$

$$0 > u_{n+1} > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{3}$$