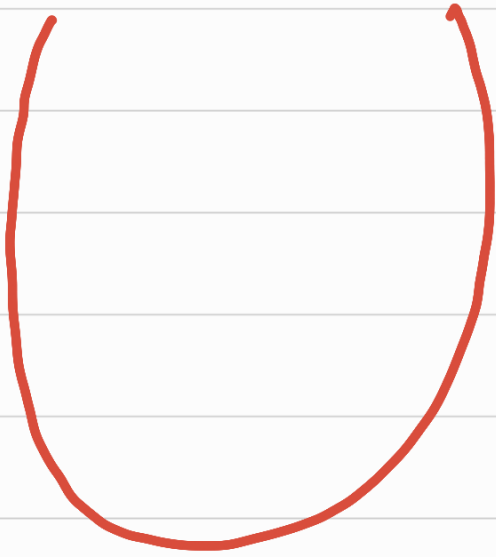
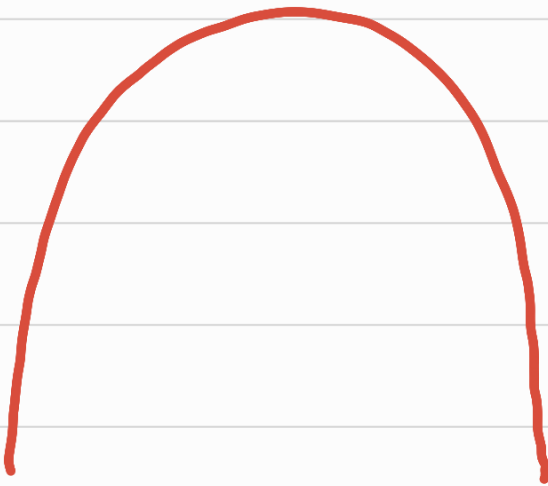


Convexit 

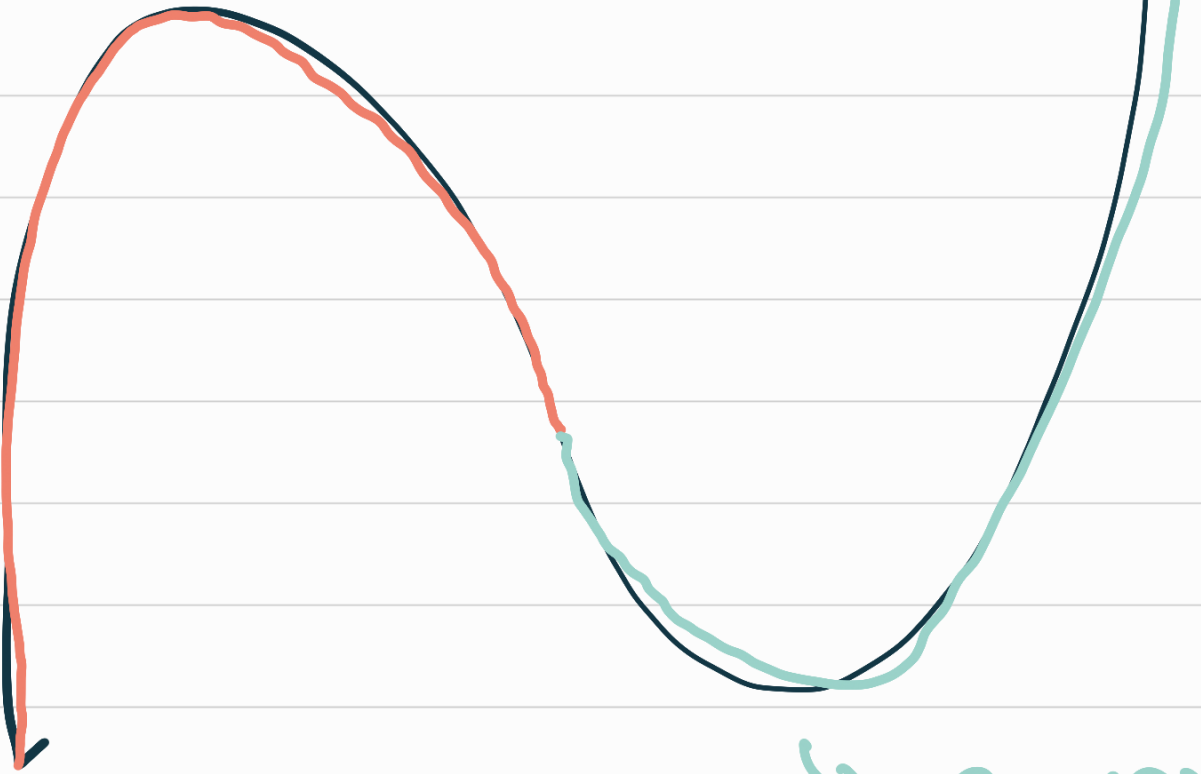


→ *convexe*



→ *concave*

Concave



convexe

• $f'' \geq 0 \Leftrightarrow f$ convexe

$f'' \leq 0 \Leftrightarrow f$ concave

• f' croissante $\Leftrightarrow f$ convexe

f' décroissante $\Leftrightarrow f$ concave

• f convexe \Rightarrow toutes les tangentes se trouvent en dessous de la courbe Ex.

f concave \Rightarrow toutes les tangentes se trouvent au dessus

de la courbe f .

• Si f'' change de signe ou f' change de variations ou f change de convexité au point a , alors a est point d'inflexion.

Pour tout réel x , on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x , déterminer $f''(x)$
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?


$$1) f'(x) = 9x^2 + 6x - 4$$

$$f''(x) = 18x + 6$$

$$2) f''(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 18x + 6 \geq 0$$

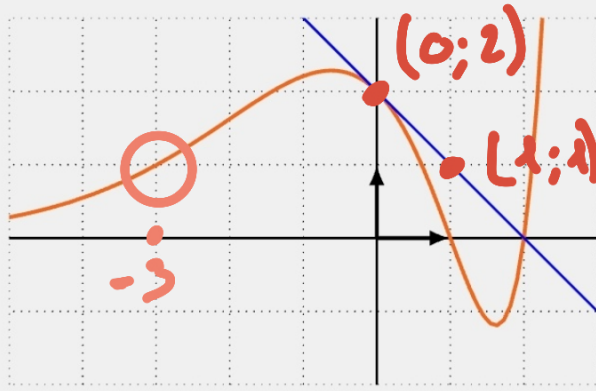
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
f''		\emptyset	

donc f est convexe sur
 $[-\frac{1}{3}; +\infty[$.

3) Le point d'inflexion
a pour abscisse $-\frac{1}{3}$.

On considère la fonction dérivable f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a également tracé la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
2. Donner une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f'(-3)$ $>, 0$
4. La fonction f semble-t-elle convexe ou concave sur $[-5; -2]$? sur $[-2; 1]$? sur $[1; 2]$?

$$1) f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{0 - 1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

$$2) y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = -2x + 2.$$

Exercice 1 :

13

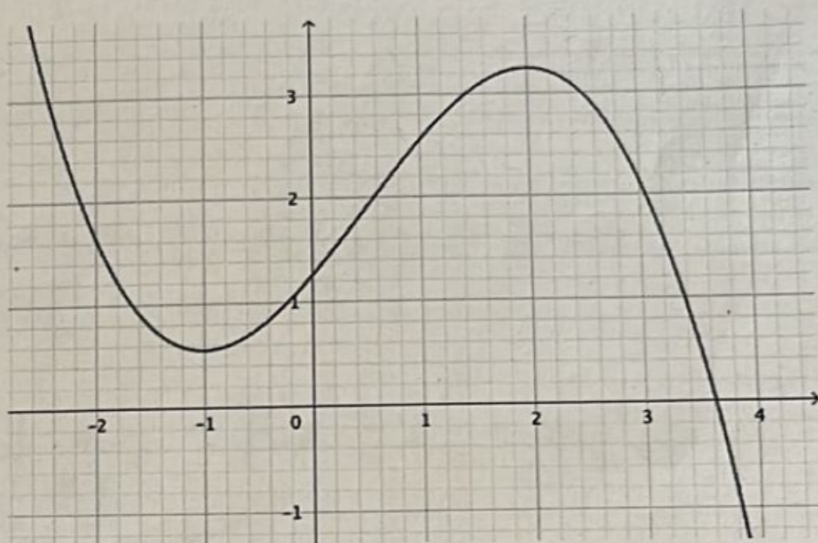
f est une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Sans justifier, déterminer la convexité de la fonction f lorsque la courbe tracée dans le repère ci-dessous est celle :

a. de la fonction f

b. de la fonction f'

c. de la fonction f''



a) f convexe sur $]-\infty; 0,5]$

et f concave sur $[0,5; +\infty[$

b) f convexe sur $[-1; 2]$

et f concave sur $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

c) f convexe sur $]-\infty; 3,5]$
et f concave sur $[3,5; +\infty[$.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (4x + 2)e^{-0,5x} - 10.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative. On admet que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

1)

a. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (-2x + 3)e^{-0,5x}$

b. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

2)

Déterminer algébriquement la convexité de f sur \mathbb{R} . On précisera les éventuels points d'inflexion à la courbe \mathcal{C}_f .

3)

a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

b. En justifiant, préciser l'intervalle sur lequel on a : $(4x + 2)e^{-0,5x} \leq 3x + 2$

24

1) a)

$$f'(x) = 4e^{-0,5x} + (4x+2) \cdot (-0,5)e^{-0,5x}$$

$$= e^{-0,5x} (4 + (4x+2)(-0,5))$$

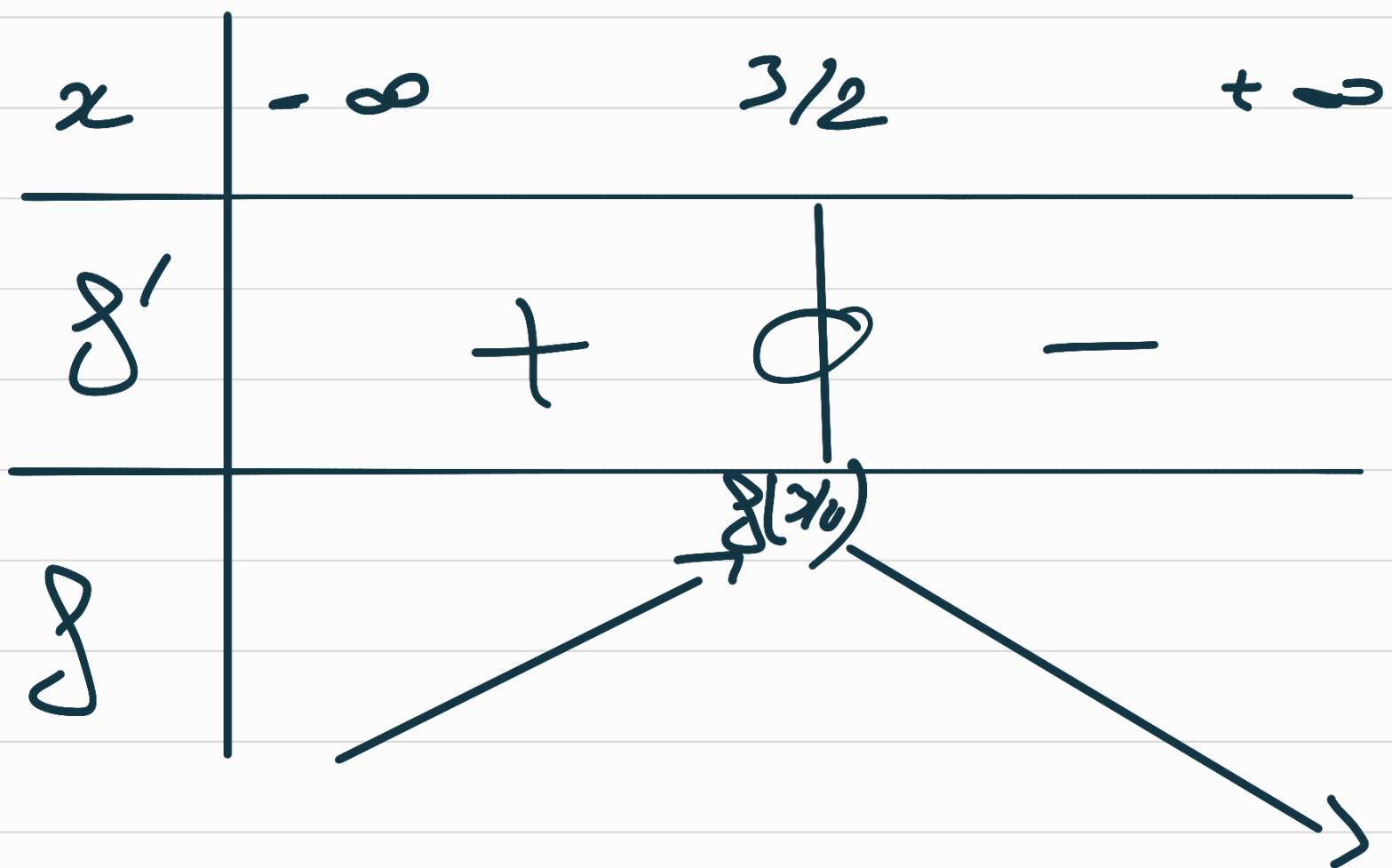
$$= e^{-0,5x} (4 - 2x - 1)$$

$$= e^{-0,5x} (-2x + 3).$$

$$b) f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow -2x > -3$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$



$$2) f'(x) = (-2x + 3)e^{-0,5x}$$

$$f''(x) = -2e^{-0,5x} + (-2x + 3) \cdot (-0,5)e^{-0,5x}$$

$$= e^{-0,5x} (-2 + (-2x + 3) \cdot (-0,5))$$

$$= e^{-0,5x} (-2 - x - 1,5)$$

$$= e^{-0,5x} (-x - 3,5)$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -x - 3,5 > 0$$

$$\Leftrightarrow -x > 3,5$$

$$\Leftrightarrow x < -3,5$$

x	$-\infty$	$-3,5$	$+\infty$
f''		$+$	$-$

$ax+b$

 $\nearrow a > 0$ $\overline{+ - \phi +}$

 $\searrow a < 0$ $\overline{+ \phi -}$

donc f est convexe sur $] -\infty ; -3,5]$ et concave sur $[-3,5 ; +\infty [$.

Et le point d'inflexion : $-3,5$.

$$3) a) y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = 3x - 8$$

$\hookrightarrow 0 \in]-3, 5[; +\infty[$, or
La fonction f est concave.

Donc la tangente en 0
est au dessus de la courbe.

$$f(x) \leq 3x - 8$$

$$(4x+2)e^{-0,5x} - 10 \leq 3x - 8$$

$$(4x+2)e^{-0,5x} \leq 3x - 8 + 10$$

$$(4x + 2) e^{-0,5x} \leq 3x + 2.$$

$$e^u = u' e^u$$

$$\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\ln(u) = \frac{u'}{u}$$

$$u^n = n u' u^{n-1}$$

$$\frac{1}{u} = -\frac{u'}{u^2}$$

$$u_{n+1} = 3u_n - 8$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$$

$$2 \times 3 \leq 3u_n \leq 3 \times 6$$

$$2 \times 3 - 8 \leq 3u_n - 8 \leq 3 \times 6 - 8$$

$$u_{n+1} = u_n^2 - P_n(u_n) + 3$$

$$f(x) = x^2 - P_n(x) + 3$$

↳ croissante / décroissante

P_{im}
 $n \rightarrow +\infty$

$$q^n =$$

$+\infty$	$q > 1$
0	$-1 < q < 1$
1	$q = 1$
X	$q \leq -1$