

exercice :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,5u_n - 1 \end{cases}$$

Montrer que la suite est minorée par -2 et majorée par 1 .

e) $-2 \leq u_n \leq 1$

On considère la proposition $P_n: -2 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

$$u_0 = 1$$

$$\text{et } -2 \leq 1 \leq 1$$

donc P_0 est vraie.

Hérédité : On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $-2 \leq u_n \leq 1$.

On veut montrer que $-2 \leq u_{n+1} \leq 1$.

$$-2 \leq u_n \leq 1$$

$$-1 \leq 0,5 u_n \leq 0,5$$

$$-2 \leq 0,5u_n - 1 \leq -0,5$$

$$-2 \leq u_{n+1} \leq -0,5 \leq 1$$

donc P_{n+1} est vraie

Conclusion: $\exists a \forall n$.

Bonus (1 point)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

Initialisation

$$u_0 = 1$$

$$\text{et } u_1 = \frac{5u_0 + 4}{u_0 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{on a bien } 0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$$

donc P_0 est vraie.

Hérédité :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

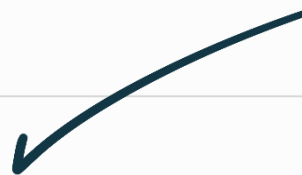
$$\text{or } u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

et f est strictement croissante.
sur $[0; +\infty[$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$$

$$0 \leq 2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3 \leq 4$$



exercice :

$$v_n = \sqrt{n^2 - 1} - n, n \geq 1$$

Montrer que (v_n) est bornée.

Conjecture : $-1 \leq v_n \leq 0$

$$v_n = f(n), \forall n \geq 1$$

avec $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$, pour $x \in [1; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - 1}} - 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1.$$

$$f'(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 1$$

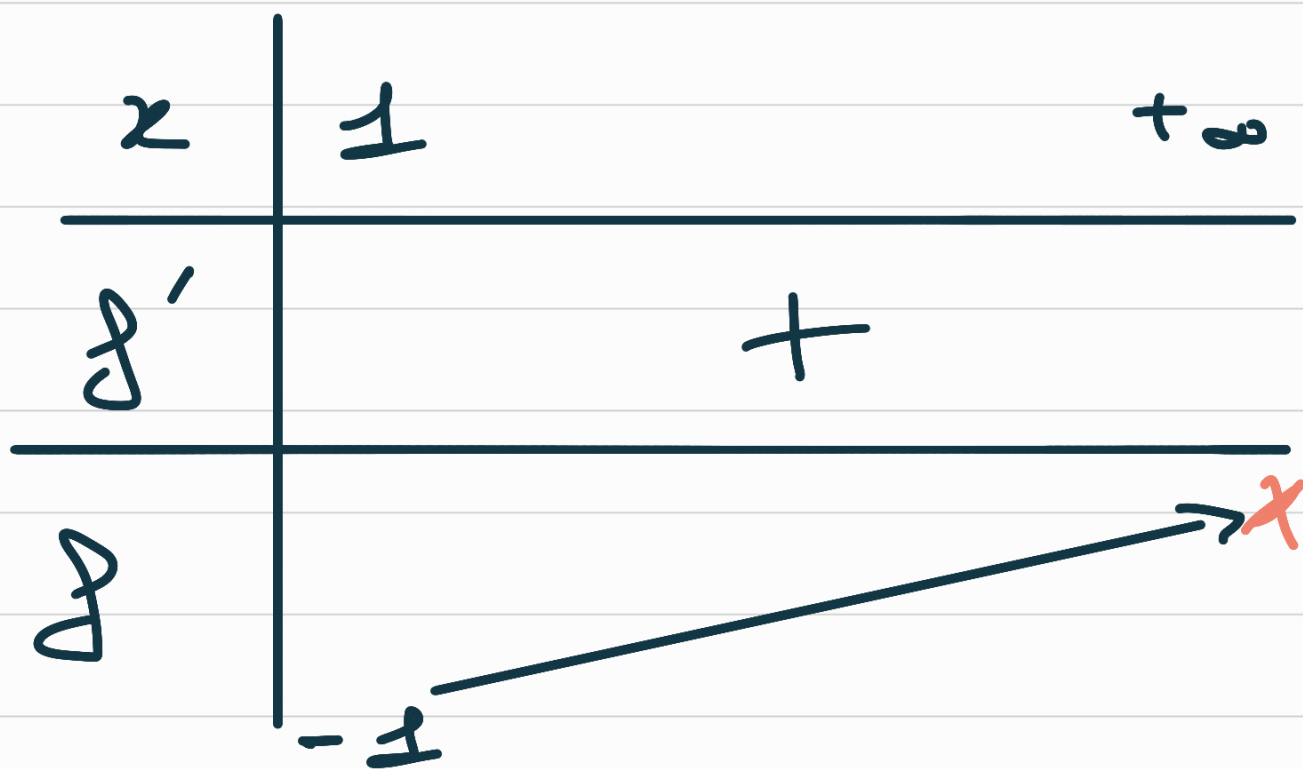
$$\Leftrightarrow x > \sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 > x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 > -1$$

$$\Leftrightarrow 0 > -1 \quad \checkmark$$

donc



donc $v_n = f(n) > -1$

Montrons que $v_n \leq 0$

$$v_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$$

$$v_n \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 - 1} \leq n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 1 \leq n^2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq n^2 - n^2 = 0 \quad \checkmark$$

19

$$v_n \leq 2$$

$$\Leftrightarrow v_n - 2 \leq 0$$

et

$$3 \leq v_n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq v_n - 3$$

exercice

$$u_n = \frac{6n+2}{3n+5}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

Montrer que (u_n) est bornée.

Conjecture : $1 \leq u_n \leq 2$

$$u_n = f(n), \text{ avec}$$

$$f(x) = \frac{6x+2}{3x+5}, \quad x \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{C}$$

$$f'(x) = \frac{6(3x+5) - (6x+2) \times 3}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{\cancel{18}x + 30 - \cancel{18}x - 6}{(3x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{24}{(3x+5)^2} > 0$$

x	1	$+\infty$
f'		$+$
f	1	$\nearrow$

done $u_n = f(n) > 1$

Montrons que $u_n \leq 2$

$$u_n \leq 2 \Leftrightarrow u_n - 2 \leq 0$$

$$\frac{6n+2}{3n+5} - 2$$

$$= \frac{6n+2 - 2(3n+5)}{3n+5}$$

$$= \frac{6n+2 - 6n - 10}{3n+5}$$

$$= -\frac{8}{3n+5} < 0$$

donc $u_n - 2 \leq 0$ et

$$u_n \leq 2.$$