

Topologie

exercice 6 :

a) On suppose $A \subset \mathbb{B}$.

Soit $x \in \bar{A}$

Rappel : $x \in \bar{A}$ ssi il existe une suite $(x_n)_n$ d'élément de A telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$

Il existe une suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

or $A \subset \mathbb{B}$, donc $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$.

donc on a bien $(x_n)_n \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$, et donc $x \in \bar{\mathbb{B}}$

Donc $\bar{A} \subset \bar{\mathbb{B}}$

3) Soit $x \in \overline{A \cap B}$

Il existe $(x_n)_n \in (A \cap B)^{\mathbb{N}}$
tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

or $A \cap B \subset A$, donc $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$
et $A \cap B \subset B$, donc $(x_n)_n \in B^{\mathbb{N}}$.

donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ avec $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$

et $(x_n)_n \in B^{\mathbb{N}}$. Donc $x \in \bar{A}$

et $x \in \bar{B}$. Donc $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$.

Donc $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

Contre exemple: $A =]0; 1[$

et $B =]1; 2[$.

$$A \cap B = \emptyset, \text{ et } \overline{A \cap B} = \emptyset$$

$$\text{et } \bar{A} = [0; 1] \text{ et } \bar{B} = [1; 2]$$

$$\text{et } \bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}.$$

C) $\supseteq$ Soit $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

$\rightarrow$ si $x \in \bar{A}$, alors il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. or $A \subset A \cup B$.

donc $(x_n)_n \in (A \cup B)^{\mathbb{N}}$ et $x \in \overline{A \cup B}$

$\rightarrow$ si $x \in \bar{B}$, alors il existe une suite (x_n) d'éléments de B telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. or $B \subset A \cup B$.

donc $(x_n)_n \in (A \cup B)^{\mathbb{N}}$ et $x \in \overline{A \cup B}$

donc $x \in \overline{A \cup B}$

c) Soit $x \in \overline{A \cup B}$

Il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $A \cup B$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A \cup B$, alors
une infinité de termes $x_n \in A$ une infinité de termes $x_n \in B$
soit $(x_n)_n \in A^\mathbb{N}$ soit $(x_n)_n \in B^\mathbb{N}$

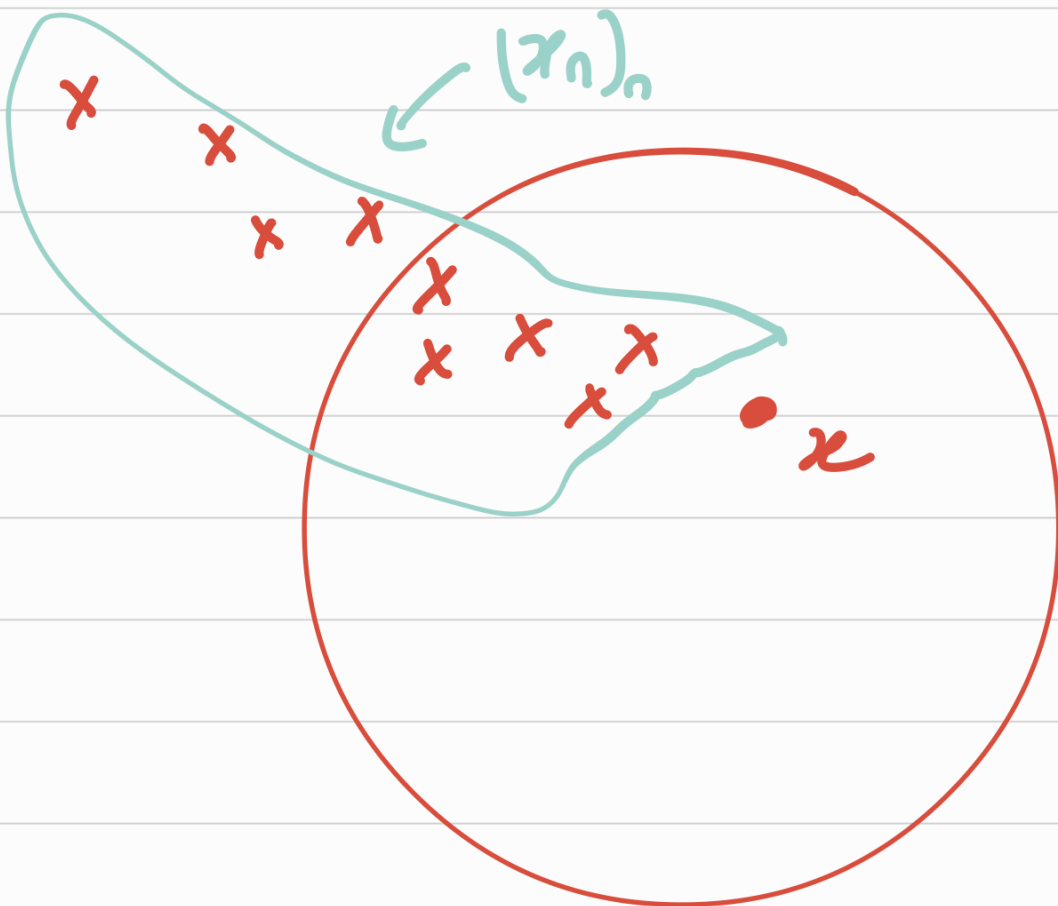
et d'où $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$

Donc $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

Donc $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

déf: $x \in \overset{\circ}{A}$ si $\exists r > 0$ tel
que $B(x, r) \subset A$.

caractérisation: $x \in \overset{\circ}{A}$ si par
toute suite $(x_n)_n \in E^{\text{fin}}$ telle
que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, alors à partir
d'un certain rang N , $\forall n > N$ $x_n \in A$.



exercice 4:

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$
 $d(x_n, x) < \varepsilon.$

Par définition, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) = \{a \in E : d(a, x) < \varepsilon\}.$

x point limite de la suite $(x_n).$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x_n \in \mathcal{B}(x, \varepsilon), \text{ à partir d'un certain rang.}$$

b) Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Soit $\varepsilon > 0$.

Alors, par tout voisinage de x , par exemple $B(x, \varepsilon)$.

on a : $x_n \in B(x, \varepsilon)$ pour n assez grand.

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
et $x \in \bar{A}$.

c) Soit $y \in \bar{A}$. Soit $\varepsilon > 0$

donc il existe des éléments de $B(y, \varepsilon) \cap A$.

Donc on peut construire une suite (y_n) d'éléments A et de $B(y, \varepsilon^n)$.

Donc comme les éléments de la suite $(y_n)_n$ appartiennent à $B(y, \varepsilon)$, alors $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$.

d). Si A est fermé, alors $A = \bar{A}$, et on a bien que toute suite d'éléments de A converge vers un élément de A .

• Si toute suite d'éléments de A converge vers un élément de A .

on a : $A \subseteq \bar{A}$

Soit $x \in \bar{A}$, alors il existe

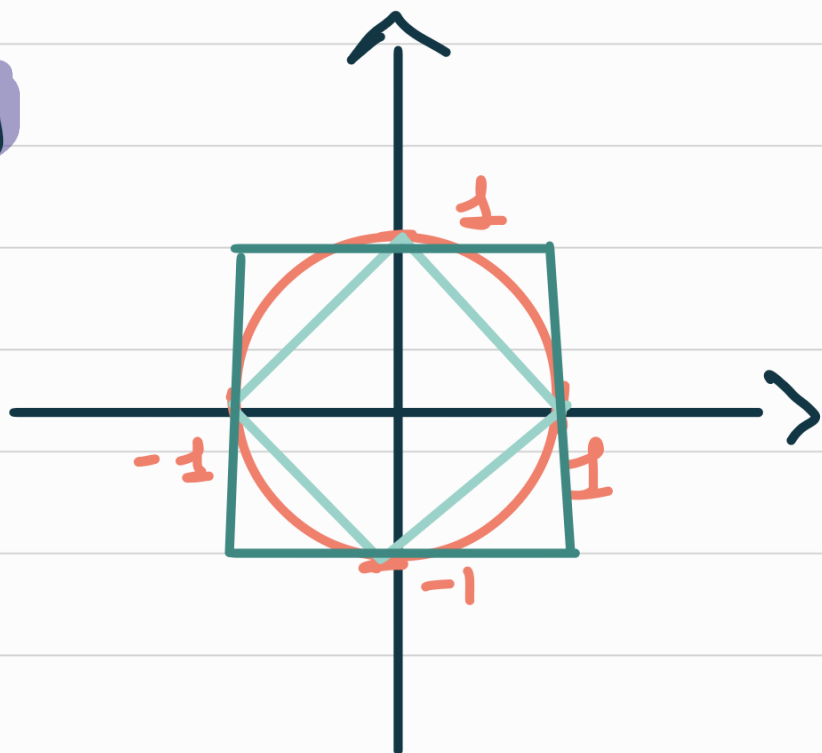
une suite d'éléments de A
qui converge vers x .

donc par hypothèse $x \in A$.
et d'autre $\bar{A} \subset A$.

Donc $\bar{A} = A$ et A est
fermé.

exercice 1:

a)



b) $\Rightarrow$ Supposons $B_g^1(0,1) \subseteq B_g^2(0,1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^2$.

• Si $x \neq 0$, on pose

$$u = \frac{x}{N_2(x)} \in B_g^1(0,1) \subseteq B_g^2(0,1)$$

donc $N_2(u) \leq 1$

$$\text{or } N_2(x) = \frac{N_2(x)}{N_1(x)}$$

$$\text{donc } \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \leq 1, \text{ et}$$

$$\text{donc } N_2(x) \leq N_1(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$\Leftarrow$ Supposons $N_2(x) \leq N_1(x)$,
pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

Soit $x \in B_f^1(0, 1)$, alors

$$\text{on a } N_1(x) \leq 1.$$

$$\text{or } N_2(x) \leq N_1(x) \leq 1.$$

$$\text{d'où } x \in B_f^2(0, 1).$$

$$\text{Donc } B_f^1(0, 1) \subseteq B_f^2(0, 1).$$

c) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

①. $\max(|x_1|, |x_2|)^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2$

↳ $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

• $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \underbrace{2|x_1||x_2|}_{>0} \geq |x_1|^2 + |x_2|^2$

↳ $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

• $\underbrace{\langle (x_1, x_2), (1, 1) \rangle}_{\text{C.S.}} = \underbrace{|x_1| + |x_2|}_{\|x\|_1}$

C.S. $\leq \|(x_1, x_2)\|_2 \times \|(1, 1)\|_2$

$\leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \times \sqrt{2}$

↳ $\|x\|_1 \leq \sqrt{2} \|x\|_2$.

- $x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \max(|x_1|, |x_2|)^2$

donc $\|x\|_2 \leq \sqrt{2} \|x\|_\infty$.

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \|x\|_2 \leq 2 \|x\|_\infty$
 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

donc :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{2} \|x\|_2 \leq 2 \|x\|_\infty$$

②. $\mathcal{B}_g^1(0, 1) \subseteq \mathcal{B}_g^2(0, 1) \subseteq \mathcal{B}_g^\infty(0, 1)$

$\Leftrightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

- $\mathcal{B}_g^2(0, 1) \subseteq \mathcal{B}_g^1(0, \sqrt{2})$

$$B_g^1(0, 1) \subset B_g^2(0, r)$$

$$\Leftrightarrow N_2(x) \leq r N_1(x)$$

$$\Leftrightarrow \|x\|_1 \leq \sqrt{2} \|x\|_2.$$

$$\bullet B_g^\infty(0, 1) \subset B_g^2(0, \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{2} \|x\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \|x\|_2 \leq 2 \|x\|_\infty.$$