

Révisions

107 (u_n) est la suite arithmétique de raison 6 telle que $u_0 = 7$.

$$\hookrightarrow u_{n+1} = u_n + 6$$

(v_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = 5u_n - 1$.

Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 5u_{n+1} - 1 \\ &= 5(u_n + 6) - 1 \\ &= 5u_n + 30 - 1 \\ &= (5u_n - 1) + 30 \\ &= v_n + 30 \end{aligned}$$

Bret :
$$v_{n+1} = v_n + r$$

donc (v_n) est arithmétique
de raison 30.

$$v_n = v_0 + n \times r$$

$$\begin{aligned} r &= 30 \quad \text{et} \quad v_0 = 5u_0 - 1 \\ &= 5 \times 7 - 1 \\ &= 34 \end{aligned}$$

donc $v_n = 34 + 30n$

$$\bullet \quad v_n = 5u_n - 1$$

$$v_n + 1 = 5u_n$$

$$\frac{v_n + 1}{5} = u_n$$

108 (u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

- a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 , puis v_1, v_2, v_3, v_4 .
- b) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
- c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer :
- v_n en fonction de n ;
 - u_n en fonction de n .

a) $u_1 = \frac{u_0}{u_0 + 1} = \frac{2}{3}$

$$u_2 = \frac{u_1}{u_1 + 1} = \frac{2/3}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{2/3}{\frac{2}{3} + \frac{3}{3}}$$

$$= \frac{2/3}{5/3} = \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{2}{5}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{u_2 + 1} = \frac{2/5}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{2/5}{\frac{2}{5} + \frac{5}{5}}$$

$$= \frac{2/5}{7/5} = \frac{2}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{7} = \frac{2}{7}$$

$$u_4 = \frac{2/7}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{2/7}{\frac{2}{7} + \frac{7}{7}} = \frac{2/7}{9/7}$$

$$= \frac{2}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{9}$$

$$= \frac{2}{9}$$

$$v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$v_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$v_3 = \frac{1}{u_3} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$v_4 = \frac{1}{u_4} = \frac{1}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{2}$$

$$b) \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n}{u_n + 1}}$$

$$= \frac{u_n + 1}{u_n}$$

$$= \frac{u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n}$$

$$= v_n + 1$$

donc (v_n) est arithmétique
de raison 1.

c) $v_n = v_0 + n \times r$

avec $r = 1$

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$$

donc

$$v_n = \frac{1}{2} + n$$

• $\frac{v_n}{1} = \frac{1}{u_n}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 $\Rightarrow a \times d = b \times c$

$$u_n \times v_n = 1 \times 1$$

$$u_n = \frac{1}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + n}$$

104 Dans chaque cas, on ne connaît que les cinq premiers termes de la suite (u_n) .

Proposer une relation de récurrence exprimant u_{n+1} en fonction de u_n compatible avec ces données.

- a) $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 15$
b) $u_0 = 2, u_1 = 3, u_2 = 8, u_3 = 63, u_4 = 3\,968$

105 Expliquer pourquoi les données de $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1-u_n}$ ne définissent pas une suite.

Étudier des suites arithmétiques

106 (v_n) est une suite arithmétique telle que $v_4 = 9$ et $v_1 + v_2 + \dots + v_8 = 92$. Calculer v_1 et la raison r de la suite.

107 (u_n) est la suite arithmétique de raison 6 telle que $u_0 = 7$.

(v_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = 5u_n - 1$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

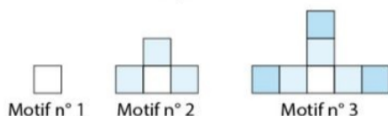
108 (u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

- a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 , puis v_1, v_2, v_3, v_4 .
b) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer :
• v_n en fonction de n ;
• u_n en fonction de n .

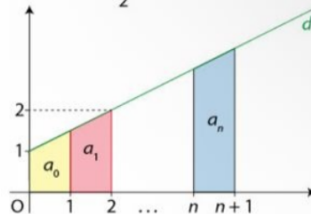
109 On construit une suite de motifs. La figure ci-dessous montre les trois premiers.



Pour tout nombre $n \geq 1$ de $\mathbb{N}$, on note C_n le nombre de carrés du motif numéro n .

- a) Justifier que la suite (C_n) est arithmétique. Quelle est sa raison ?
b) Calculer le nombre de carrés du motif n° 1 000.

110 Dans le repère orthonormé ci-dessous, d est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.



Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note a_n l'aire du trapèze coloré en bleu sur la figure.

- a) Calculer a_0, a_1 et a_2 .
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n .
c) Démontrer que la suite (a_n) est arithmétique. Quelle est sa raison ?
d) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note :

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Exprimer S_n en fonction de n et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

- 111** 1. a) Calculer la somme des entiers pairs de 2 à 100.
b) Calculer la somme des entiers impairs de 1 à 99.
2. Calculer de deux façons différentes la somme des entiers de 1 à 100.

Étudier des suites géométriques

112 a et b désignent deux nombres réels avec $b \neq 0$. (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = a \times b^n$. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

113 La désintégration de l'atome de radium 226 donne de l'hélium et un autre élément radioactif, le radon 222. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, la masse m_n , en gramme, de radon, n jours après la désintégration vérifie la relation $m_{n+1} - m_n = -0,165m_n$.

- a) Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n . En déduire la nature de la suite (m_n) .
b) Exprimer m_n en fonction de n et de m_0 .
c) Avec la calculatrice, déterminer au bout de combien de jours la masse de radon sera inférieure à la moitié de sa valeur initiale.
Ce nombre est la **demi-vie** du radon 222.

