

Un exercice de bac très complet!

Un joueur effectue une succession de parties.

S'il a gagné une partie, alors la probabilité qu'il gagne la suivante vaut 0,8.

S'il a perdu une partie, alors la probabilité qu'il gagne la suivante vaut 0,5.

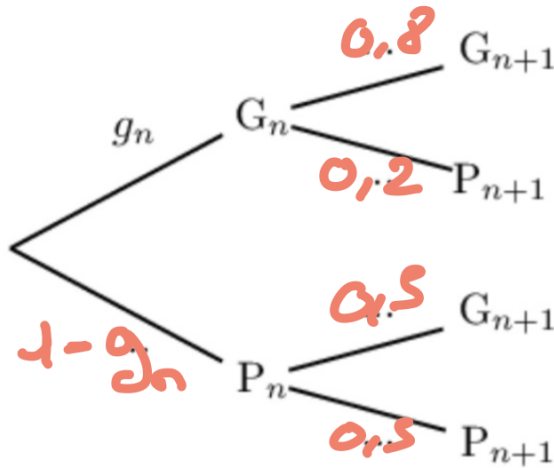
Soit G_n et P_n les événements:

G_n : "le joueur a gagné la n-ième partie"

P_n : "le joueur a perdu la n-ième partie"

Pour tout entier naturel n non nul, on pose: $g_n = p(G_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $g_{n+1} = 0,3g_n + 0,5$

3. On suppose que la probabilité que le joueur gagne sa première partie vaut 0,9.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $\frac{5}{7} \leq g_n$

b. Montrer que la suite (g_n) est décroissante.

c. Montrer que la suite (g_n) est convergente.

d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$.

4. On suppose que la probabilité que le joueur gagne sa première partie vaut g , où g est un réel fixé de l'intervalle $[0;1]$.

On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = g_n - \frac{5}{7}$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $g_n = (g - \frac{5}{7}) \times 0,3^{n-1} + \frac{5}{7}$.

c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$

d. Interpréter concrètement le résultat obtenu à la question précédente.

2) 1) après la formule des probabilités totales:

$$\mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(P_n \cap G_{n+1})$$

$$= g_n \times 0,8 + (1 - g_n) \times 0,5$$

$$= 0,8g_n + 0,5 - 0,5g_n$$

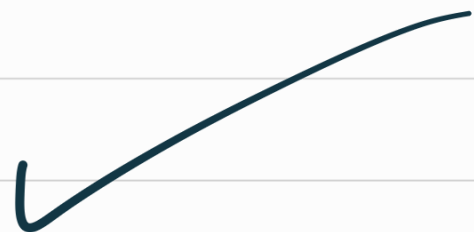
$$= 0,3g_n + 0,5$$

$$\text{or } \mathbb{P}(G_{n+1}) = g_{n+1}$$

$$\text{donc } g_{n+1} = 0,3g_n + 0,5$$

3) a) Initialisation : $g_1 = 0,9$

$$\text{et } \frac{5}{7} \leq 0,9.$$



Hérédité:

$$\frac{5}{7} \leq g_n \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{n+1} \leq g_n \end{array} \right.$$

$$\frac{5}{7} \times 0,3 \leq 0,3 \times g_n$$

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{10} \leq 0,3 g_n$$

$$\frac{15}{70} + 0,5 \leq 0,3 g_n + 0,5$$

$$\frac{15}{70} + \frac{5}{10} \leq 0,3 g_n + 0,5$$

$$\frac{5}{7} \leq g_{n+1}$$



décroissant : $g_{n+1} \leq g_n$

croissant : $g_{n+1} > g_n$

4) a) $u_{n+1} = g_{n+1} - \frac{5}{7}$

$$= 0,3g_n + 0,5 - \frac{5}{7}$$

$$= 0,3g_n + \frac{5}{10} - \frac{5}{7}$$

$$= 0,3g_n - \frac{3}{14}$$

$$= 0,3 \left(g_n - \frac{\frac{3}{14}}{0,3} \right)$$

$$= 0,3 \left(g_n - \frac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{10}} \right)$$

$$= 0,3 \left(g_n - \frac{5}{7} \right)$$

$$= 0,3 v_n$$

donc (v_n) est géométrique
de raison 0,3.

$$b) v_n = v_1 \times 0,3^{n-1}$$

$$\text{avec } v_1 = g_1 - \frac{5}{7}$$

$$= 0,5 - \frac{5}{7}$$

$$= \frac{9}{10} - \frac{5}{7}$$

$$= \frac{13}{70}.$$

$$v_n = \frac{13}{70} \times (0,3)^{n-1}$$

- $v_n = g_n - \frac{5}{7}$

$$v_n + \frac{5}{7} = g_n$$

$$\Rightarrow g_n = \frac{13}{70} \times (0,3)^{n-1} + \frac{5}{7}.$$

exercice :

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 1$$

$$t_{n+1} = \frac{3}{4}t_n - 1$$

