

— Exercice 1 —

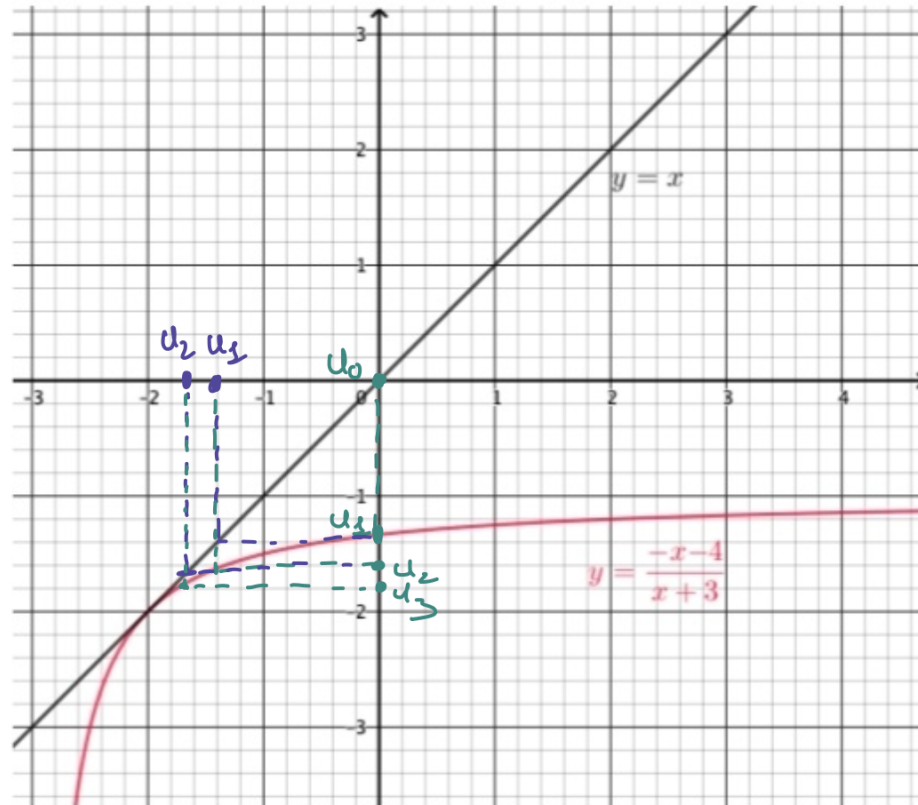
8 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. (a) Construire les 4 premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique ci-dessous. *On laissera les traits de construction apparents.*



- (b) Conjecturer le sens de variations et les éventuels minorant et majorant de la suite (u_n) .

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :  
    u = 0  
    for i in range(n):  
        u =  $(-u-4)/(u+3)$   
    return(u)
```

Compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

3. Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

(Aide : pour l'hérédité, on utilisera la question 3.)

5. Les conjectures de la question 1b) sont-elles validées ?

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

(a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 . (On détaillera les calculs)

(b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique et on précisera sa raison.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

1) b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et qu'un majorant est 0 et un minorant est -2.

3)
$$f'(x) = \frac{-1x(x+3) - 1x(-x-4)}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{-\cancel{x} - 3 + \cancel{x} + 4}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+3)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier sur $]-3; +\infty[$

4) Blabla à écrire ooo

Initialisation: $u_0 = 0$

et
$$u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{-4}{3}$$

d'où
$$-2 < -\frac{4}{3} \leq 0.$$

Hérédité: o o o o o o

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 et f est strictement
 croissante sur $]-3; +\infty[$

$$f(-2) < f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

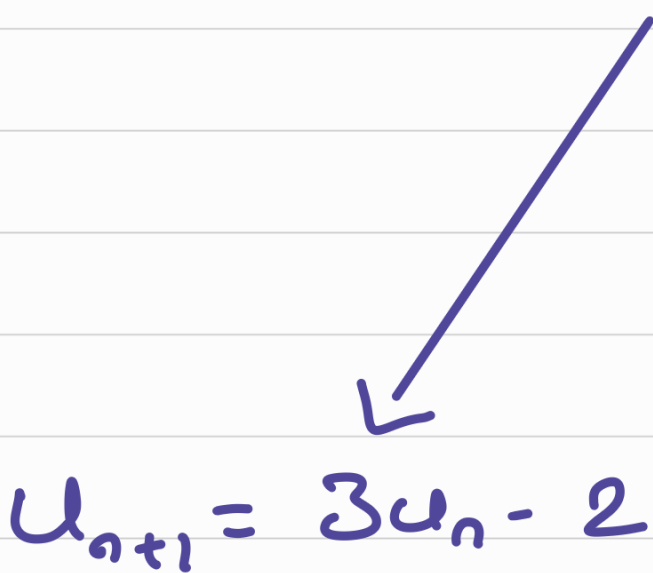
$$-2 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$$



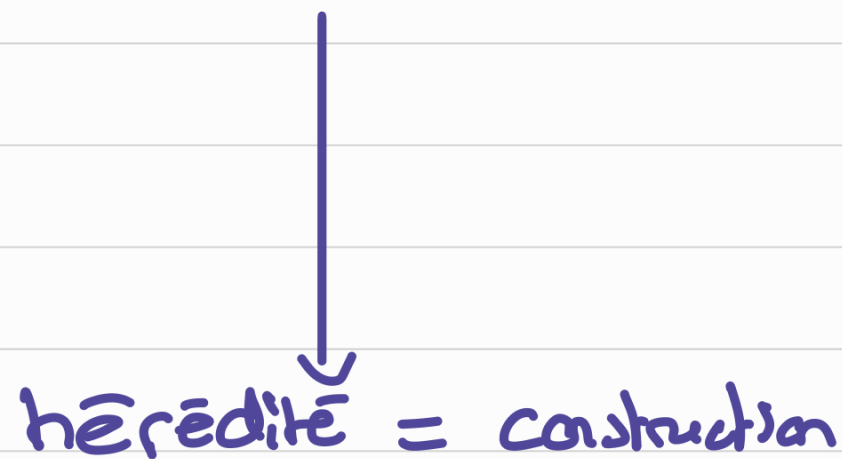
Conclusion: . . .

5) Oui, Les conjectures
 ont été démontrées.

- Écriture de la suite sans forme de récurrence



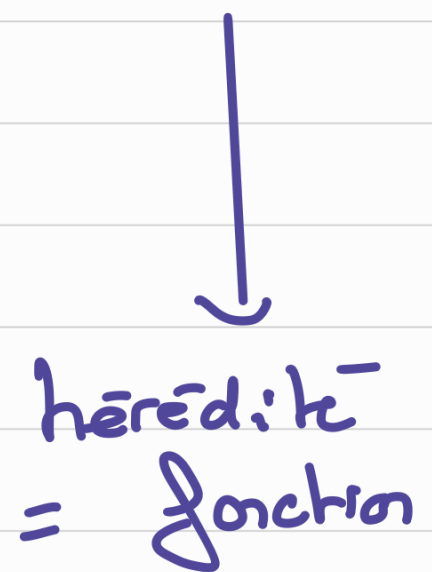
$u_{n+1} = 3u_n - 2$



hérité = construction



$u_{n+1} = f(u_n)$



hérité = fonction

- Écriture de la suite sous forme explicite

$$u_n = \sqrt{3n+2}$$

↳ ① recherche majorant / minorant sur la calcul.

② tableau variations de la fonction f : $u_n = f(n)$ pour trouver soit minorant soit majorant

③ étude du signe de $u_n - m \leq 0$ ou majorant
minorant : $u_n - m \geq 0$

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

- (a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 . (On détaillera les calculs)
(b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique et on précisera sa raison.
(c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

a)
$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$v_1 = \frac{1}{u_1 + 2} = \frac{1}{-\frac{4}{3} + 2} = \frac{3}{2}$$

$$v_2 = \frac{1}{u_2 + 2} = \frac{1}{-\frac{8}{5} + 2} = \frac{5}{2}.$$

or
$$u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = -\frac{8}{5}$$

$$b) \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2(u_n + 3)}{u_n + 3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2u_n + 6}{u_n + 3}} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n + 2}{u_n + 3}}$$

$$= \frac{u_n + 3}{u_n + 2}$$

$$= \frac{(u_n + 2) + 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{u_n + 2}{u_n + 2} + \frac{1}{u_n + 2} \quad u_n$$

$$= 1 + v_n$$

$$\Delta q: v_{n+1} - v_n$$

$$= \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$= \circ \rightarrow \circ$$

$$= \frac{u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2}{u_n + 2} = 1$$

donc (v_n) est arithmétique
de raison 1.

c). Comme (v_n) est arith.
de raison 1 et de
premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$.

$\hookrightarrow v_n = v_0 + n \times r = \frac{1}{2} + n$

• $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ inverse

$$\frac{1}{v_n} = u_n + 2$$

$$\frac{1}{v_n} - 2 = u_n.$$

d'ai

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + n} - 2$$

— Exercice 2 —

7 points

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

— les tirs à deux points.

Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

— les tirs à trois points.

Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir.

On considère les événements suivants :

D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».

R : « le tir est réussi ».

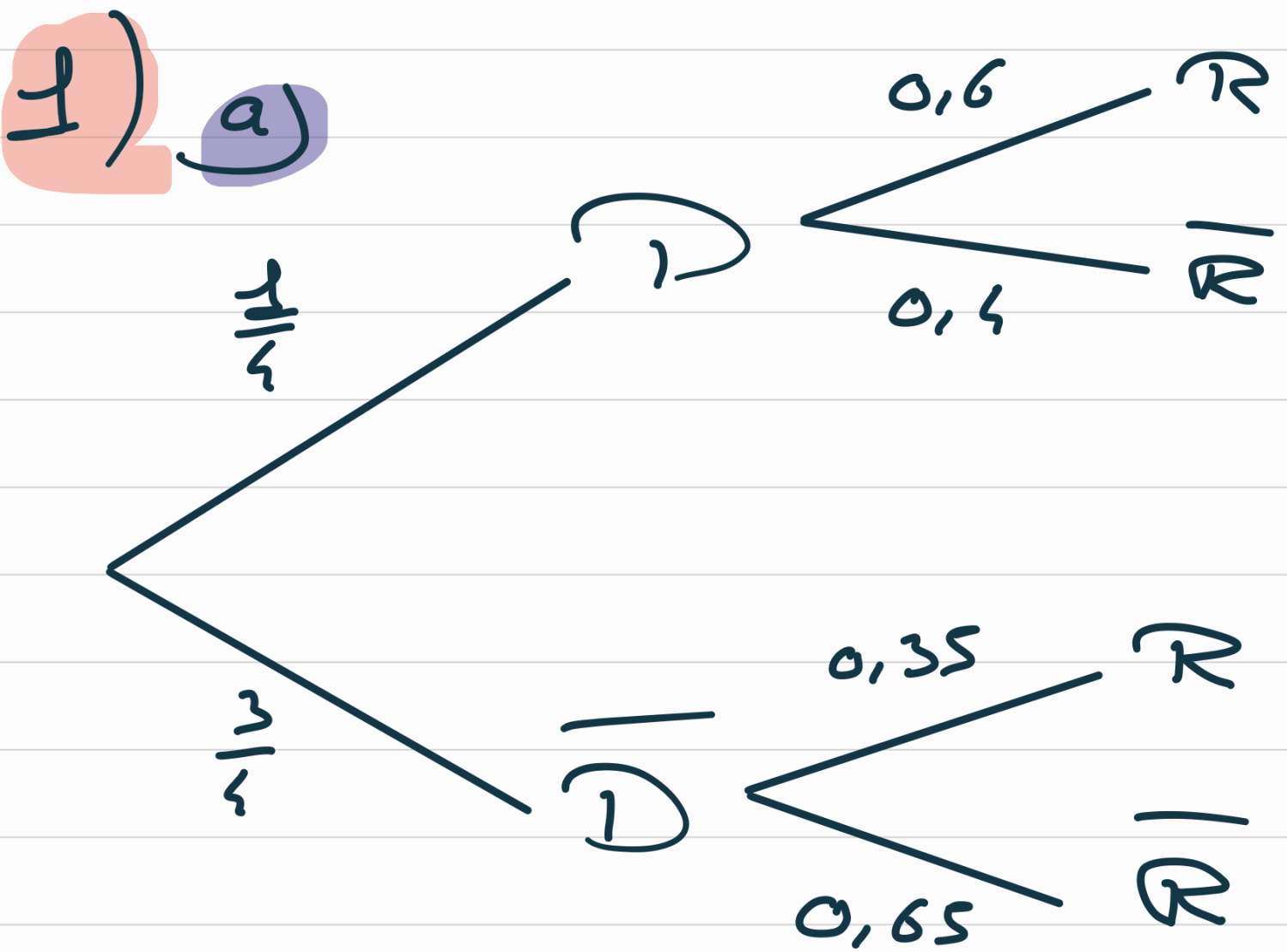
- Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
 - Calculer la probabilité $p(\overline{D} \cap R)$.
 - Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0,4125.
 - Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.
2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.
- On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.
- On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.
- Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
 - Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - Déterminer la probabilité que Stéphanie réussisse 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.
 - Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.

Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0,99. *On détaillera la démarche.*



b)

$$\begin{aligned}
 P(\bar{D} \cap R) &= P_{\bar{D}}(R) \times P(\bar{D}) \\
 &= 0,35 \times \frac{3}{4} \\
 &= 0,2625.
 \end{aligned}$$

done . . .

c) D'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(D \cap R) + P(\bar{D} \cap R) \\ &= 0,6 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times 0,35 \\ &= 0,4125 \end{aligned}$$

donc . . .

$$d) P_R(\bar{D}) = \frac{P(\bar{D} \cap R)}{P(R)}$$

$$= \frac{0,2625}{0,4125}$$

$$\approx 0,64$$

donc . . .

2) a) 3pts

$$X \sim \mathcal{B}(10; 0,35)$$

b) $E[X] = n \times p$

$$= 10 \times 0,35$$

$$= 3,5$$

En moyenne, Stéphanie réussit 3,5 tir à trois points sur 10 de tirs.

c) $P(X \geq 4) \approx 0,49$.

d) $P(X \geq 6) \approx 0,09$.