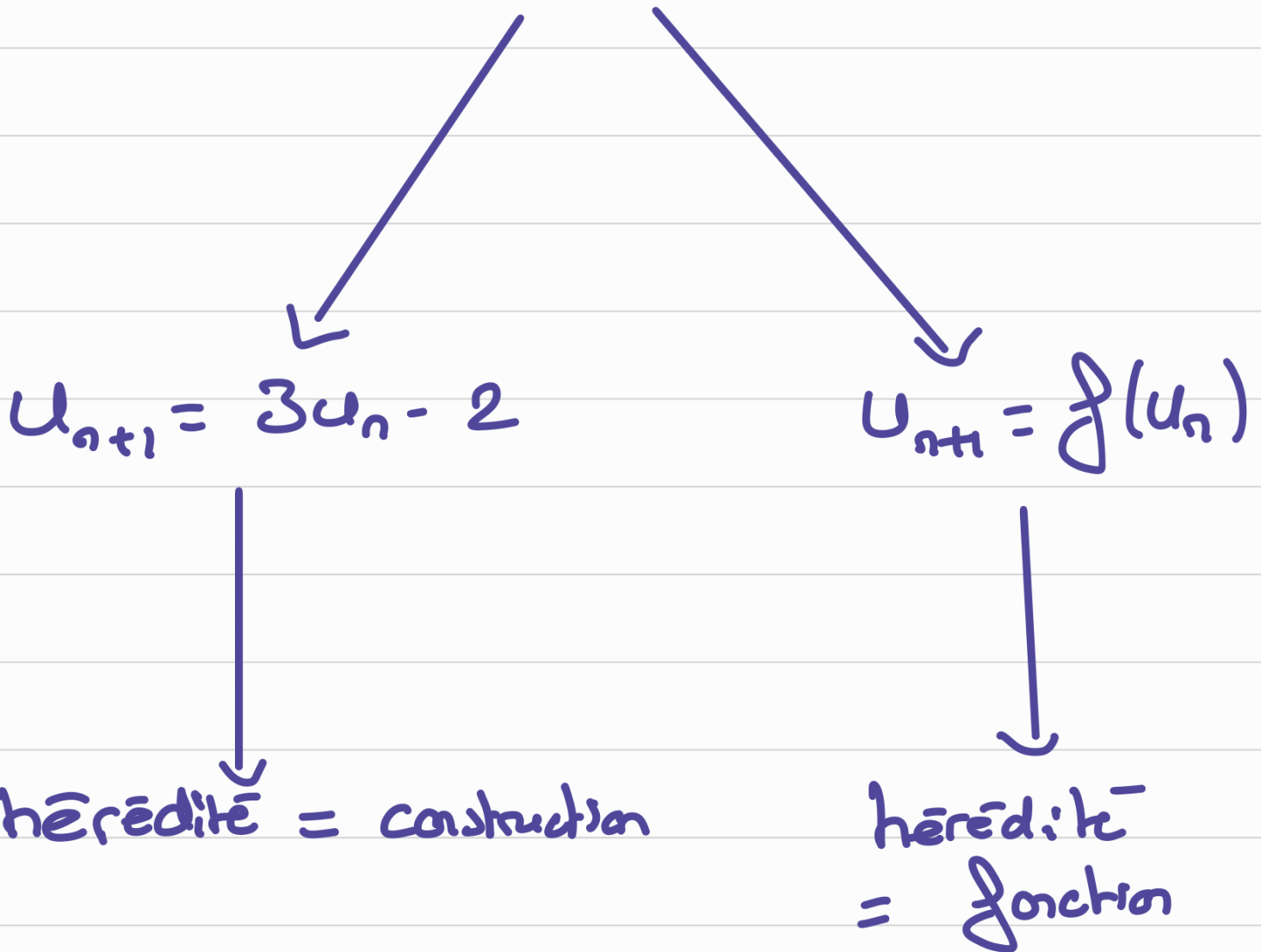


- Écriture de la suite
sans forme de récurrence



- Écriture de la suite sous forme explicite

$$u_n = \sqrt{3n+2}$$

↳ ① recherche majorant / minorant sur la calcul.

② tableau variations de la fonction f : $u_n = f(n)$ pour trouver soit minorant soit majorant

③ étude du signe de $u_n - M \leq 0$ ou majorant

$u_n - m \geq 0$ minorant.

$$v_n = \frac{5n + 6}{2n - 1}$$

① Conjecture: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $2,5 \leq v_n \leq 11$.

② $f(x) = \frac{5x + 6}{2x - 1}$, $x > 1$

$$f'(x) = \frac{\cancel{5}(\cancel{2}x - 1) - \cancel{2}(\cancel{5}x + 6)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{-17}{(2x - 1)^2} < 0$$

donc f est décroissante.
 sur $\mathbb{R}^+$

n	1	3	$+\infty$
f'		-	ϕ +
f	μ		

donc $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $v_n = f(n) \leq 11$

sq: $(v_n) \searrow$ et $v_1 = 11$

$\Rightarrow v_n \leq 11, \forall n \in \mathbb{N}^+.$

③ 1q: $v_n > 2,5$

$$v_n - 2,5 = \frac{5n+6}{2n-1} - 2,5$$

$$= \frac{5n + 6 - 2,5(2n - 1)}{(2n - 1)}$$

$$= \frac{5n + 6 - 5n + 2,5}{(2n - 1)}$$

$$= \frac{8,5}{2n - 1} \geq 0$$

$$\rightarrow 2n - 1 > 0 \Leftrightarrow 2n > 1$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{2} \geq 1$$

donc $u_n - 2,5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow u_n \geq 2,5$$

— Exercice 1 —

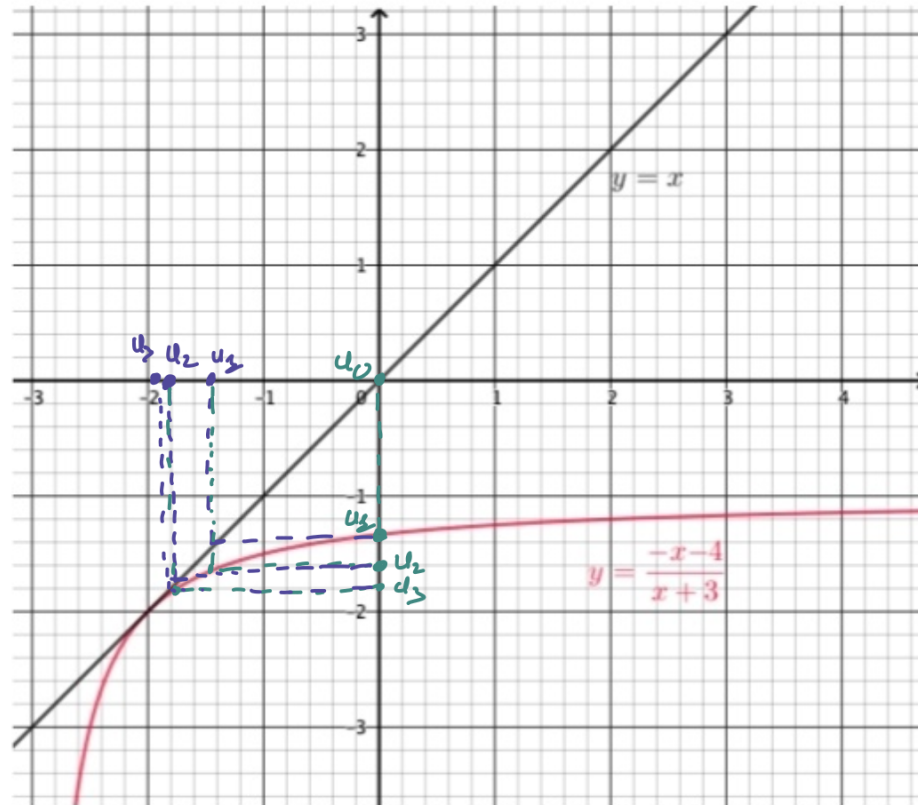
8 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. (a) Construire les 4 premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique ci-dessous. On laissera les traits de construction apparents.



$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ u_2 &= f(u_1) \\ u_3 &= f(u_2) \end{aligned}$$

- (b) Conjecturer le sens de variations et les éventuels minorant et majorant de la suite (u_n) .

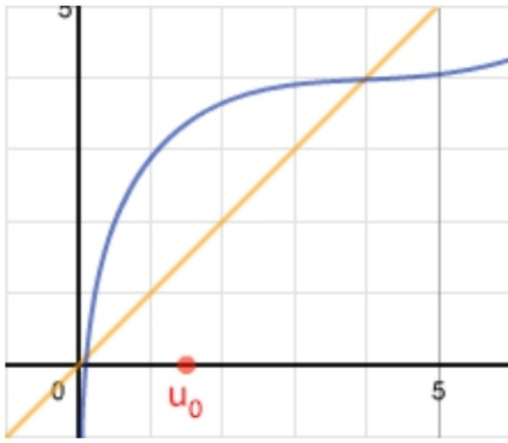
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
        u = (-u-4)/(u+3)
    return (u)
```

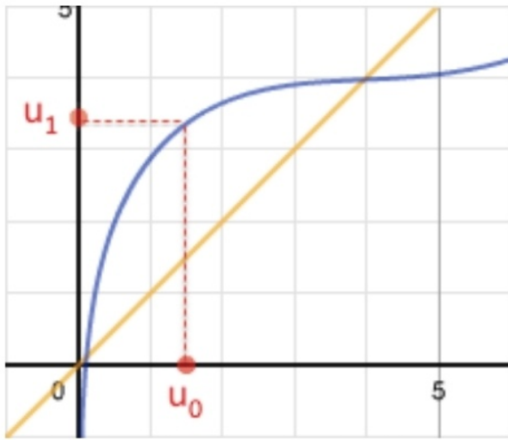
Compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

3. Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par :

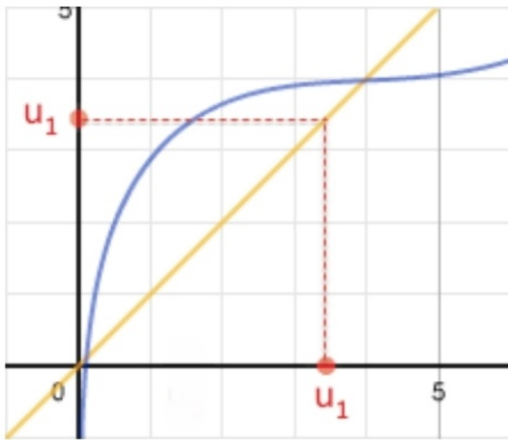
$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$



a. On place le premier terme de la suite sur l'axe des abscisses : u_0 ici.



b. On place u_1 sur l'axe des ordonnées en traçant l'image de u_0 par f , car $u_1 = f(u_0)$.



c. On reporte enfin u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.

Pour placer u_2 , on réitère ce procédé à partir de u_1 , et ainsi de suite.

4) 5) On peut conjecturer que (u_n) est décroissante. et que $\forall n \in \mathbb{N}, -2 \leq u_n \leq 0$.

3. Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

(Aide : pour l'hérédité, on utilisera la question 3.)

5. Les conjectures de la question 1b) sont-elles validées ? *oui!*

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

(a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 . (On détaillera les calculs)

(b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique et on précisera sa raison.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

4) Initialisation: $u_0 = 0$

$$u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = -\frac{4}{3}$$

donc $-2 < -\frac{4}{3} \leq 0$



Hérédité:

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n$$

or $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et
est strictement croissante sur
 $]-2; +\infty[$.

$$f(-2) < f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$-2 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$$



6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

(a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 . (On détaillera les calculs)

(b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique et on précisera sa raison.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

$$a) \quad v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$v_1 = \frac{1}{u_1 + 2} = \frac{1}{-\frac{4}{3} + 2} = \frac{3}{2}$$

$$v_2 = \frac{1}{u_2 + 2} = \frac{1}{-\frac{8}{5} + 2} = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = -\frac{8}{5}$$

$$b) \quad v_{n+1} - v_n$$

$$= \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2(u_n + 3)}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n + 2}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{u_n + 3 - 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{u_n + 2}{u_n + 2}$$

$$= 1.$$

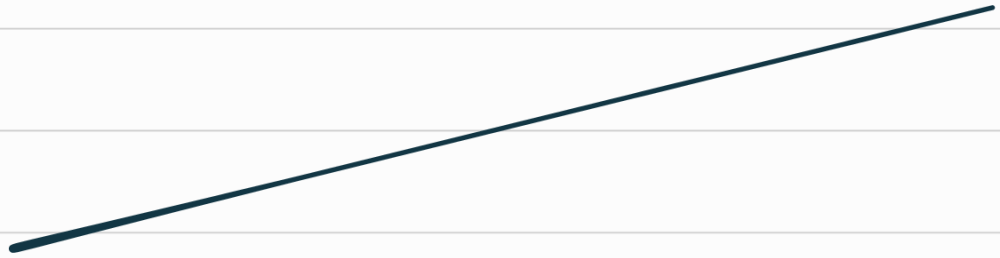
donc (v_n) est arith.
de raison 1.

c) $v_n = v_0 + n \times r = \frac{1}{2} + n$

$$\bullet v_n = \frac{1}{u_{n+2}}$$

$$\frac{1}{v_n} = u_n + 2 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

done $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + n} - 2$



■ Exercice 2 ■

7 points

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

— les tirs à deux points.

Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

— les tirs à trois points.

Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir.

On considère les évènements suivants :

D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».

R : « le tir est réussi ».

- Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
 - Calculer la probabilité $p(\overline{D} \cap R)$.
 - Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0,4125.
 - Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.
2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

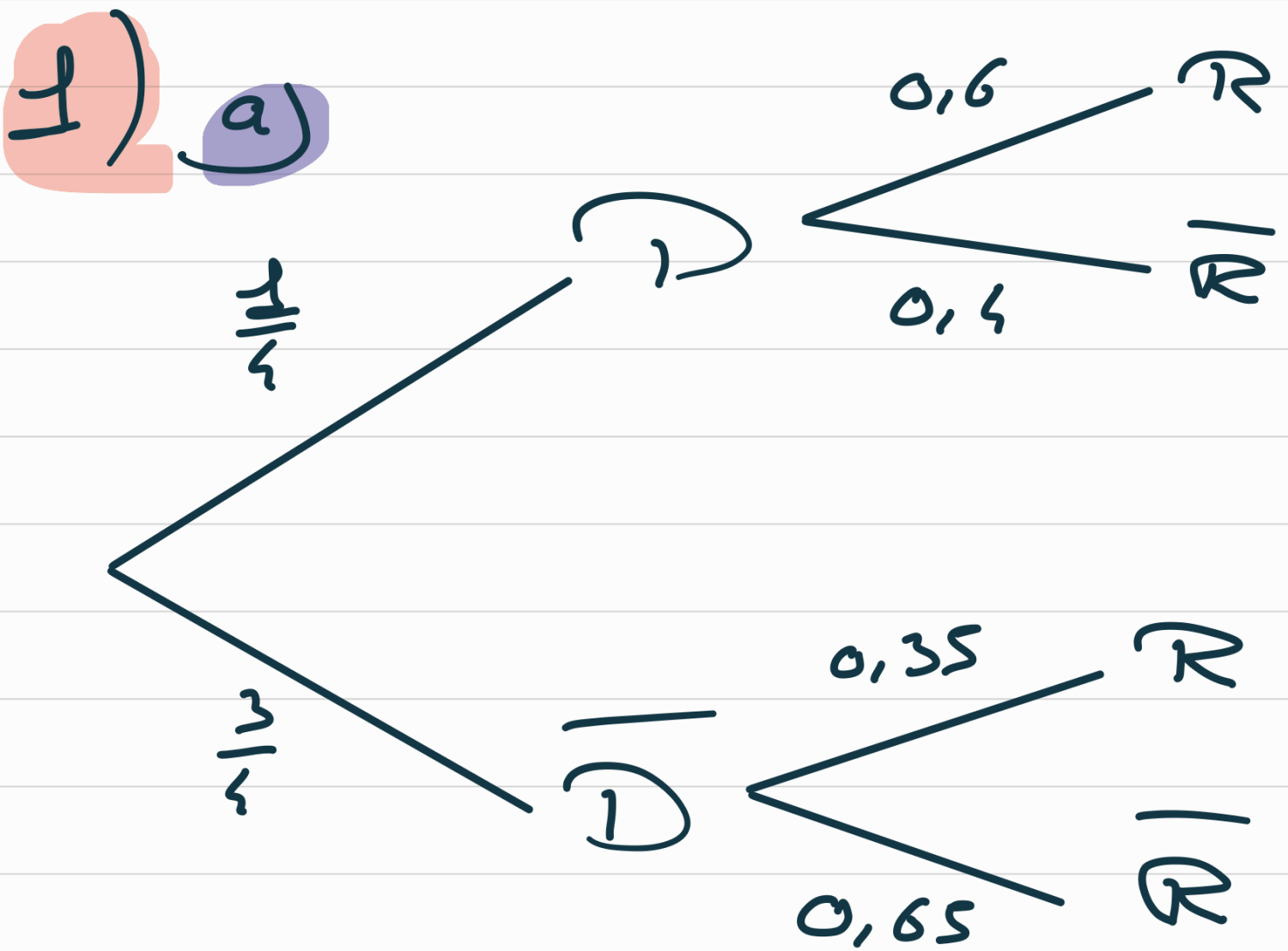
- Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
- Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice *En notant*
- Déterminer la probabilité que Stéphanie réussisse 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.
- Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.

Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0,99. On détaillera la démarche.



b)

$$\begin{aligned}
 P(\bar{D} \cap R) &= P_{\bar{D}}(R) \times P(\bar{D}) \\
 &= 0,35 \times \frac{3}{4} \\
 &= 0,2625.
 \end{aligned}$$

done . . .

c) D'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(D \cap R) + P(\bar{D} \cap R) \\ &= 0,6 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times 0,35 \\ &= 0,4125 \end{aligned}$$

donc . . .

$$\begin{aligned} d) P_R(\bar{D}) &= \frac{P(\bar{D} \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{0,2625}{0,4125} \\ &\approx 0,64 \end{aligned}$$

donc . . .

2)

a)

3pts

$$X \sim \mathcal{B}(10; 0,35)$$

$$b) E[X] = n \times p$$

$$= 10 \times 0,35$$

$$= 3,5$$

En moyenne, Stéphanie réussit 3,5 tirs à trois points sur 10 de tirs.

$$c) P(X \geq 4) \approx 0,49.$$

$$d) P(X \geq 6) \approx 0,09.$$