

— Exercice 2 —

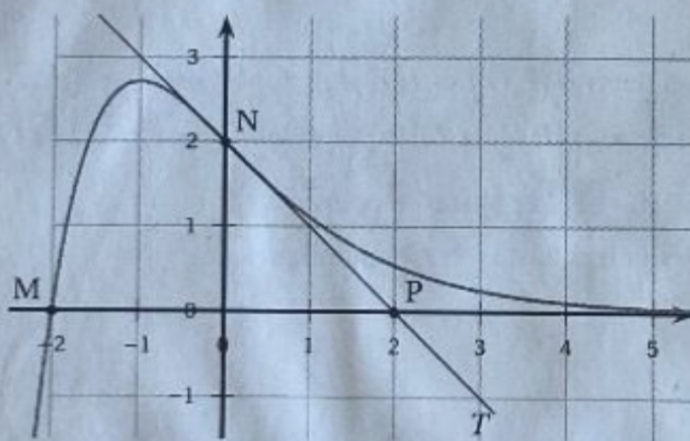
5,5 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point $N(0; 2)$;
- le point $M(-2; 0)$ appartenant à $\mathcal{C}_f$ et $P(2; 0)$ appartenant à la tangente T .

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.

**Partie A : étude graphique**

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. (a) Donner $f(0)$. $= 2$ (b) Déterminer $f'(0)$. $= -1$
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. $\Delta = \{-2\}$
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme : $f(x) = (ax + b)e^{\lambda x}$, où a , b et λ sont des constantes réelles. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.

2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a .
3. Déterminer une expression algébrique de f . Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f , $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations complet de f . Justifier.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. Justifier.

5 points

3) La tangente T se situe au dessus de la courbe C_f sur $] -\infty; 0]$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle et donc elle n'est pas convexe sur tout $\mathbb{R}$.

Partie B

1) $f(0) = 2$

et $f'(0) = 3$

donc $b = 2$.

2) $f(-2) = 0$

$$f(-2) = (-2a + b) e^{-2\lambda}$$

donc $(-2a + 5) \underbrace{e^{-2\lambda}}_{\neq 0} = 0$

$$-2a + 5 = 0$$

$$-2a + 5 = 0 \iff a = \frac{5}{2}$$

3) $f(x) = (x+2)e^{\lambda x}$

on a : $f'(0) = -1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\lambda x} + (x+2)\lambda e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x}(\lambda x + 2\lambda + 1) \end{aligned}$$

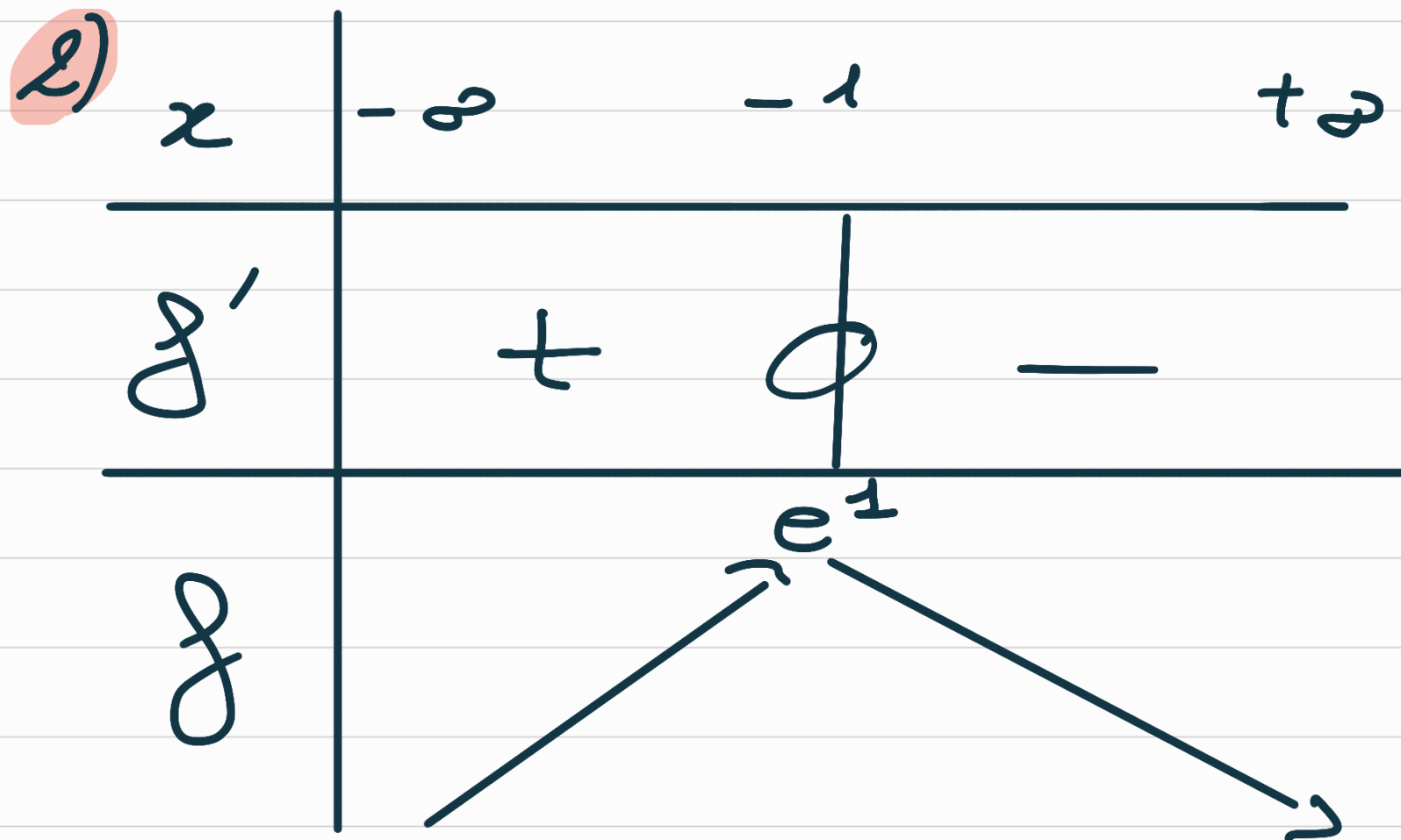
$$f'(0) = 2\lambda + 1$$

d'où : $2\lambda + 1 = -1 \iff \lambda = -1$

Donc $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

Partie C

1) $f(x) = e^{-x}(-x-1)$



3) $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$y = -x + 2$$

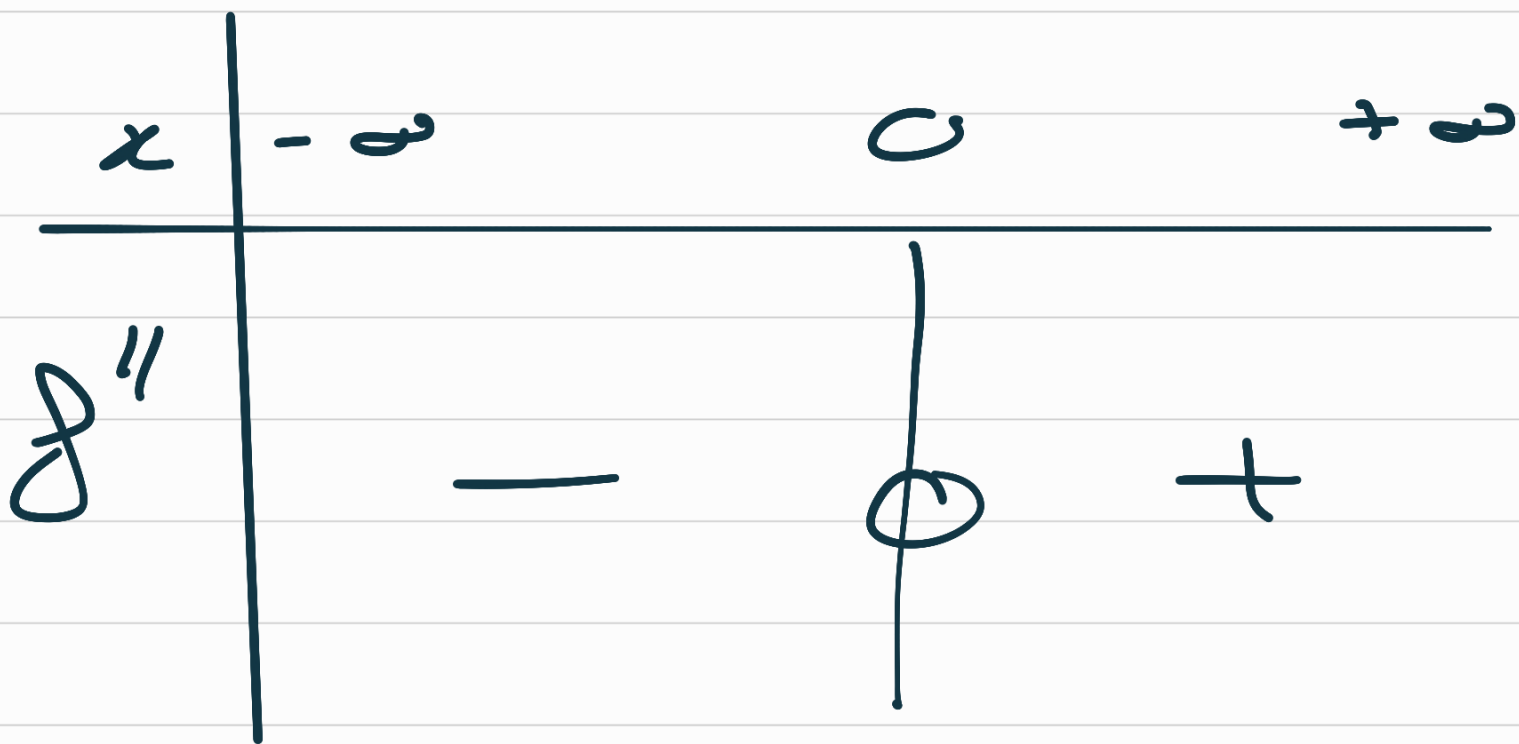
4) Calcul f'' .

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(-x-1)e^{-x} + e^{-x} - 1 \\ &= e^{-x}(x+1-1) \\ &= xe^{-x} \end{aligned}$$

5) Etude de convexité de la fonction f .

$$f''(x) > 0 \Rightarrow x e^{-x} > 0$$

$$\Rightarrow x > 0$$



donc f est convexe
sur $[0; +\infty[$ et f est
concave sur $] -\infty; 0]$.

Le point d'inflexion est
le point d'abscisse $x = 0$.

$$g_{n+1} = \mathbb{P}(G_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}(G_{n+1} \cap G_n) + \mathbb{P}(G_{n+1} \cap D_n)$$

$$= \mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) \times \mathbb{P}(G_n)$$

$$+ \mathbb{P}_{D_n}(G_{n+1}) \times \mathbb{P}(D_n)$$