

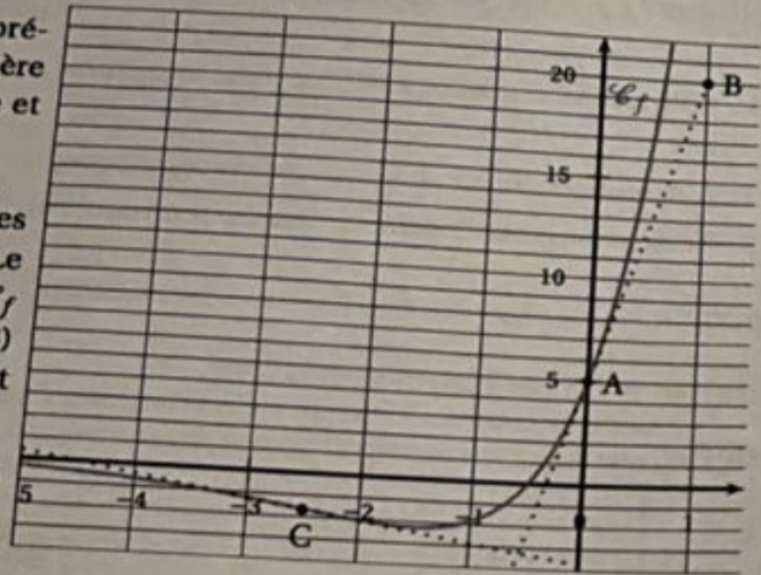
EXERCICE 1 (corrigé : voir Bac Métropole 13 septembre 2021)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On notera f' la fonction dérivée de f .
On donne les points A de coordonnées $(0; 5)$ et B de coordonnées $(1; 20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonction f .



1. On peut affirmer que :
 - a. $f'(-0,5) = 0$
 - b. si $x \in]-\infty; -0,5[$, alors $f'(x) < 0$
 - c. $f'(0) = 15$
 - d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5; 0)$.
On peut affirmer que :
 - a. $a = 10$ et $b = 5$
 - b. $a = 2,5$ et $b = -0,5$
 - c. $a = -1,5$ et $b = 5$
 - d. $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = (10x + 25)e^x.$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -2,5 & +\infty \\ \hline f'' & - & 0 & + \end{array}$$

On peut affirmer que :

- a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$
- b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$
- c. Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$
- d. $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n , $U_n \leq V_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

- a. la suite (U_n) converge
- b. pour tout entier naturel n , $V_n \leq 2$
- c. la suite (U_n) diverge
- d. la suite (U_n) est majorée

$$1) f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{20 - 5}{1 - 0} = 15.$$

$$2) f(0) = 5 \text{ et } f(0) = b$$

$$\Rightarrow b = 5$$

$$f(-0,5) = 0$$

$$f(-0,5) = (0,5a + b)e^{-0,5}$$

$$(-0,5a + 5)e^{-0,5} = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5a + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-5}{-0,5} = 10$$

1. Affirmation : La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.
2. Affirmation : Toute suite bornée est convergente.
3. Affirmation : Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

$$1) \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n+1} \leq 1 \\ \frac{-1}{n+1} \geq -1 \end{cases}$$

donc $-1 \leq u_n \leq 1$

et (u_n) est bornée.

2) Faux, car par exemple

la suite $u_n = \cos(n)$.

- $-1 \leq u_n \leq 1$

$\hookrightarrow (u_n)$ bornée

- on sait que (u_n) n'est pas convergente car les termes oscillent entre -1 et 1 .

3) $u_n = 2 - \frac{1}{n} \mid u_n = -\frac{1}{n}$

- $$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$
$$= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$

$$= -\frac{n + (n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} > 0$$

donc (u_n) est croissante.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2,$$

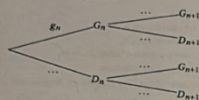
$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

donc l'affirmation vraie

3. Calculer g_2 .

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $(n+1)$ -ième parties de la journée.



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n) .

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

(question 8 supprimée car pas encore travaillée)

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + \epsilon$, où ϵ est un nombre réel strictement positif.

```
1 def seuil(epsilon):
2     g = 0.5
3     n = 1
4     while ...:
5         g = 0.5 * g + 0.2
6         n = ...
7     return (n)
```

EXERCICE 3 (corrigé : voir Bac Polynésie mars 2023)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n < -1$.
- Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

EXERCICE 4 (corrigé : voir Bac Polynésie mars 2023)

1. Affirmation : La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

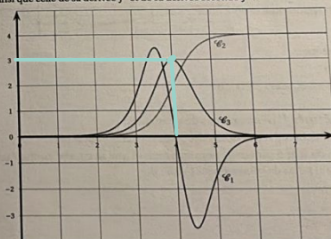
2. Affirmation : Toute suite bornée est convergente.

3. Affirmation : Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

EXERCICE 5 (corrigé : voir Bac Polynésie mars 2023)

Le plan est ramené à un repère orthogonal.

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f'' .



$C_2 \rightarrow f$
 $C_3 \rightarrow f'$
 $C_1 \rightarrow f''$

- Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
- Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.
- Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

$$\rightarrow f'(0) = 3$$

$$u_{n+1} - u_n = (2 \times 0,9^{n+1} - 3) - (2 \times 0,9^n - 3)$$

$$= 2 \times 0,9^{n+1} - 3 - 2 \times 0,9^n + 3$$

$$= 2 \times 0,9^n (0,9 - 1)$$

$$= 2 \times 0,9^n \times -0,1$$

$$= -0,2 \times 0,5^9$$

$$< 0$$

donc (u_n) décroissante.