

Etude Qualitative

- une équation autonome est de la forme :

$$y' = f(y).$$

remarque: $y' = t^2 y - 2t$

et la fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ est appelée un champs de vecteur.

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

telle que $f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$

on définit les **isodines** :

$$\rightarrow I_v = \{(x, y) \in \Omega : f_1(x, y) = 0\}$$

$$\rightarrow I_h = \{(x, y) \in \Omega : f_2(x, y) = 0\}$$

- méthode : tracer les champs de vecteurs.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{I_v \cup I_h\}$:

- ① $f_1 > 0$ et $f_2 > 0 \Rightarrow \nearrow$
- ② $f_1 > 0$ et $f_2 < 0 \Rightarrow \searrow$
- ③ $f_1 < 0$ et $f_2 > 0 \Rightarrow \nwarrow$
- ④ $f_1 < 0$ et $f_2 < 0 \Rightarrow \swarrow$

• un point stationnaire si y^* est dit $f(y^*) = 0$.

↳ Les points stationnaires sont les points d'intersection entre I_h et I_v .

remarque: Les points stationnaires forment toujours des solutions globale de $y' = f(y)$.

Portrait de phase

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

On associe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et le système s'écrit de manière matricielle :

$$Y' = AY.$$

$\Rightarrow$ Les solutions sont de la forme $Y(t) = C e^{tA}$, $C \in \mathbb{R}^2$.
 $\downarrow$
 (c_1, c_2)

On suppose $\det A \neq 0$,
et donc 0 est le seul
point stationnaire

• Cas 1 : Les valeurs propres
de A sont réelles et la
matrice est diagonalisable.

On note $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ les
valeurs propres de A et E_λ, E_μ
est espaces propres associés.

Les solutions sont de la
forme :
$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = C_1 e^{\lambda t} \\ \tilde{y}(t) = C_2 e^{\mu t} \end{cases}$$

$$\rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$\hookrightarrow \tilde{x}(t) = \tilde{y}(t) = 0$, donc
 le singulier $\{0,0\}$ est la
 seule courbe intégrale.

$$\rightarrow C_1 = 0, C_2 > 0$$

$\hookrightarrow \tilde{x}(t) = 0$ et $\tilde{y}(t) > 0$
 et la courbe intégrale est
 la demi droite $\{0, \tilde{y}\} : \tilde{y} > 0$
 et le sens de parcours dépend
 du signe de μ .

$$\rightarrow C_1 = 0, C_2 < 0$$

$\hookrightarrow \tilde{x}(t) = 0$ et $\tilde{y}(t) < 0$
 et la courbe intégrale est
 la demi droite $\{(0, \tilde{y}) : \tilde{y} < 0\}$
 et le sens de parcours dépend
 du signe de μ .

$$\rightarrow C_1 > 0, C_2 = 0$$

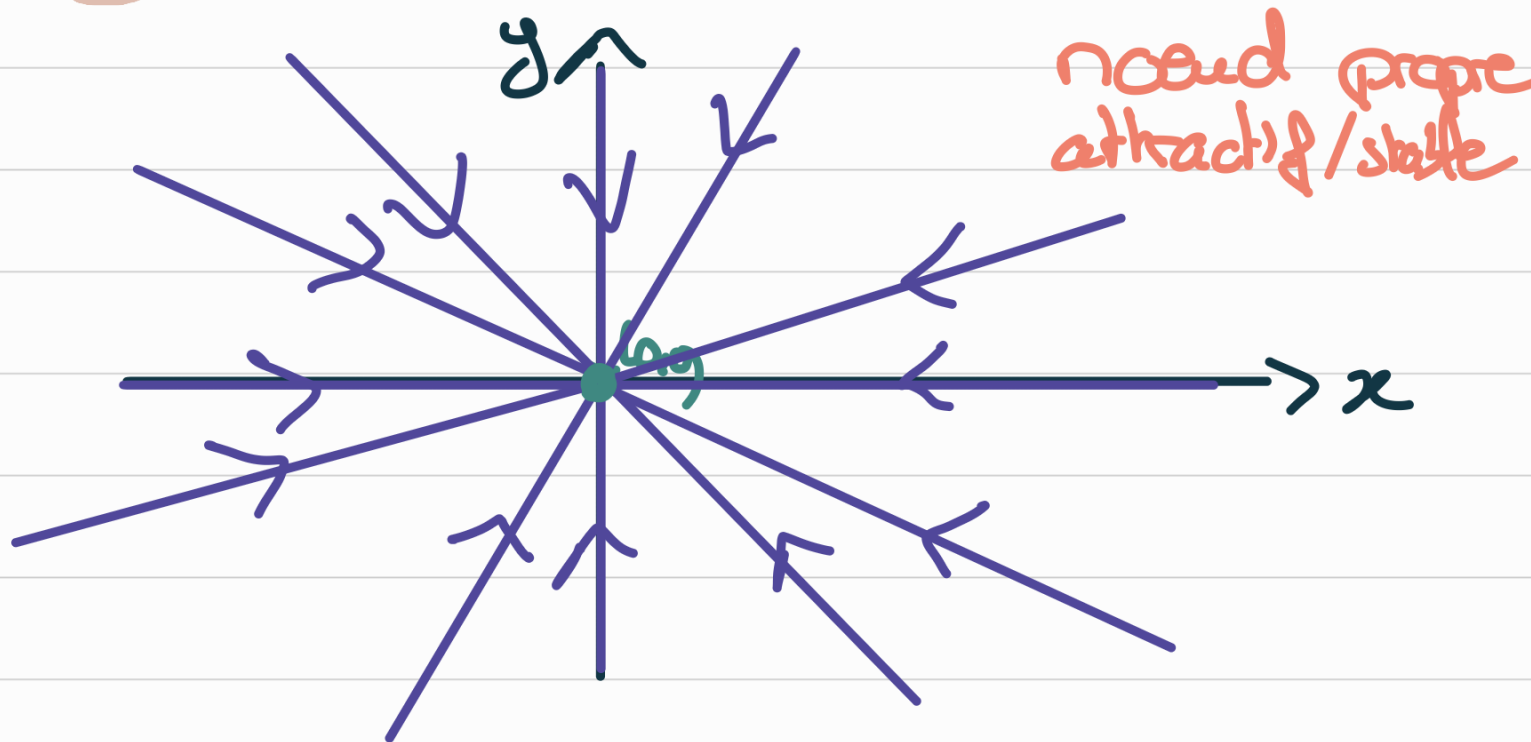
$\hookrightarrow \tilde{x}(t) > 0$ et $\tilde{y}(t) = 0$
 et la courbe intégrale est
 la demi droite $\{(\tilde{x}, 0) : \tilde{x} > 0\}$
 et le sens de parcours dépend
 du signe de λ .

$$\rightarrow C_1 < 0, C_2 = 0$$

$\hookrightarrow \tilde{x}(t) < 0$ et $\tilde{y}(t) = 0$
 et la courbe intégrale est
 la demi droite $\{(\tilde{x}, 0) : \tilde{x} < 0\}$
 et le sens de parcours dépend
 du signe de λ .

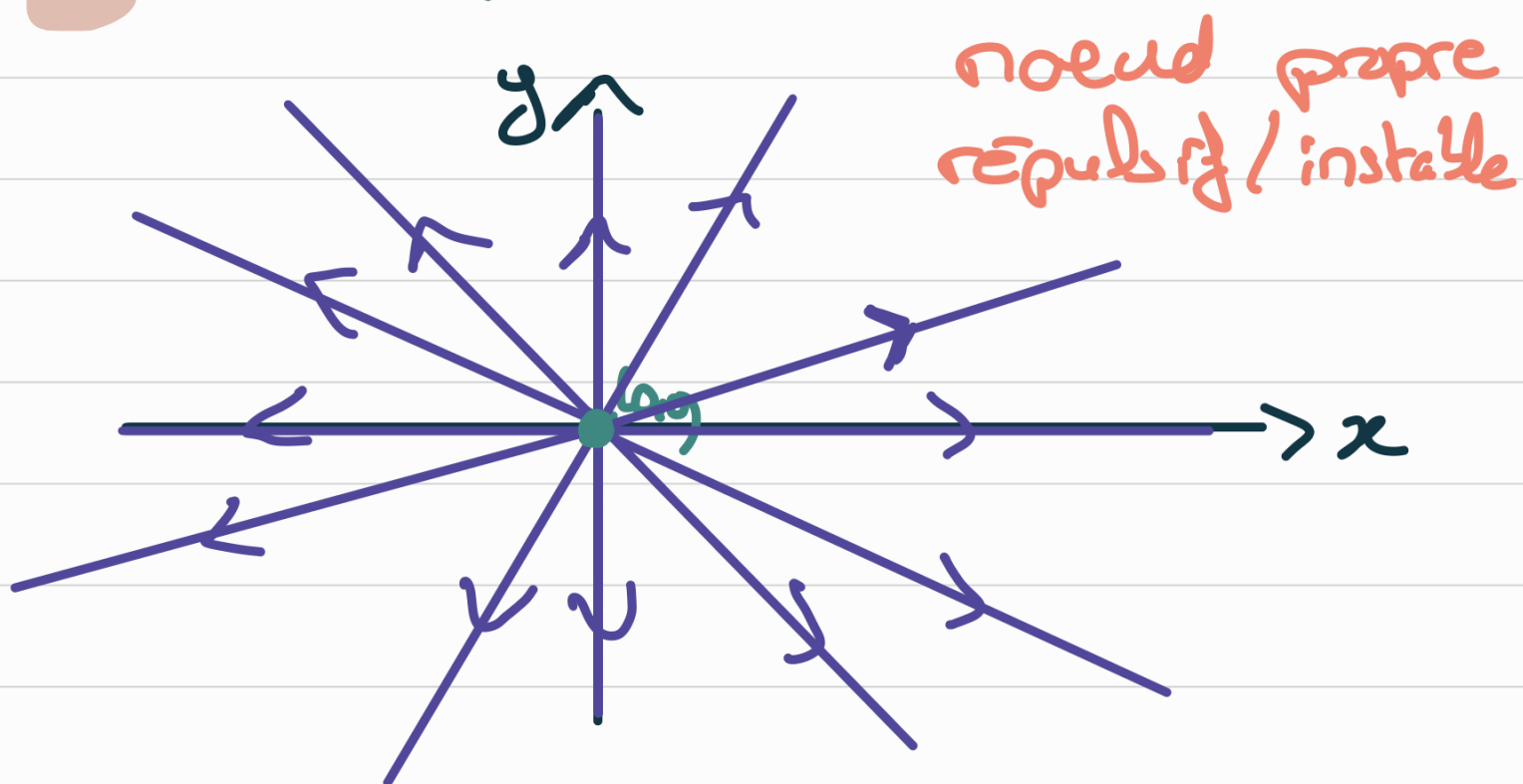
$$\rightarrow C_1 C_2 \neq 0$$

* $\lambda = \mu < 0$



*

$$\lambda = \mu > 0$$

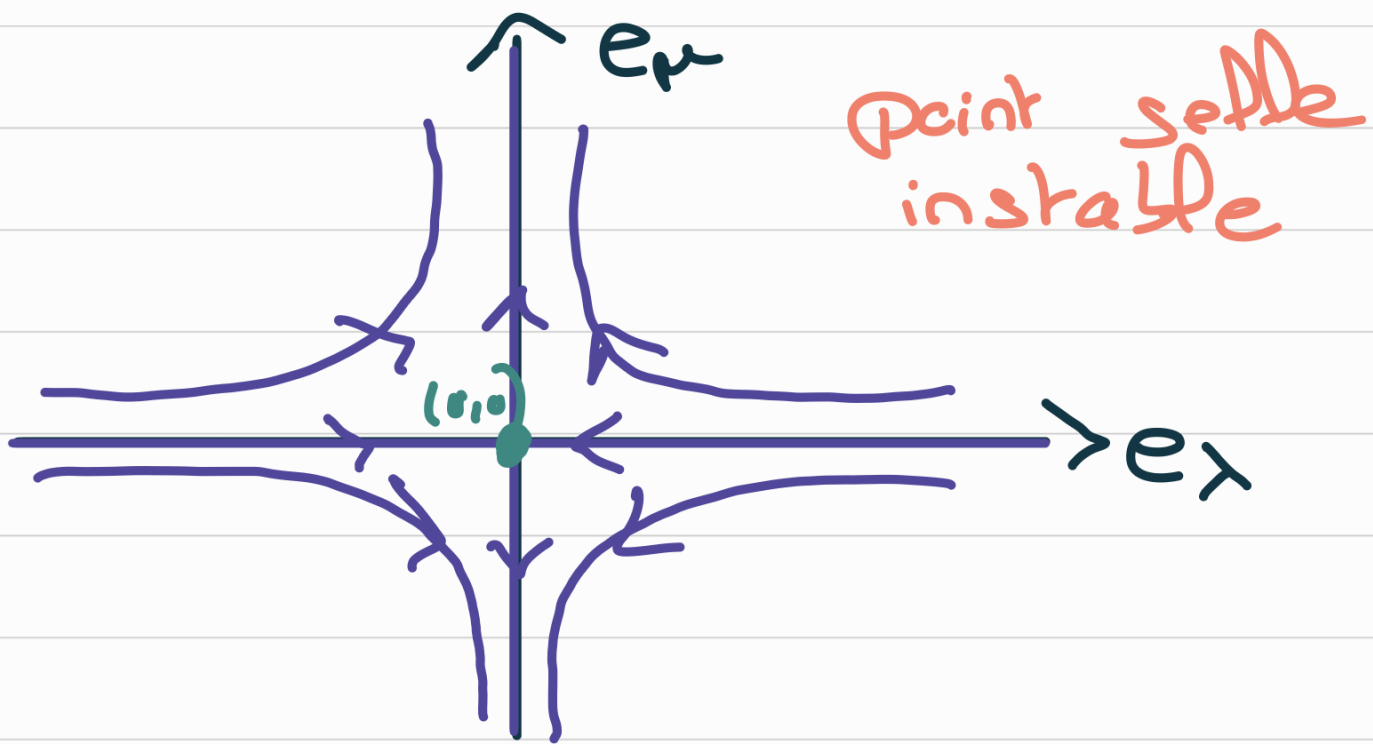


Des courbes intégrales sont $\{y = Cx : C \in \mathbb{R}\}$ et $\{x = c\}$

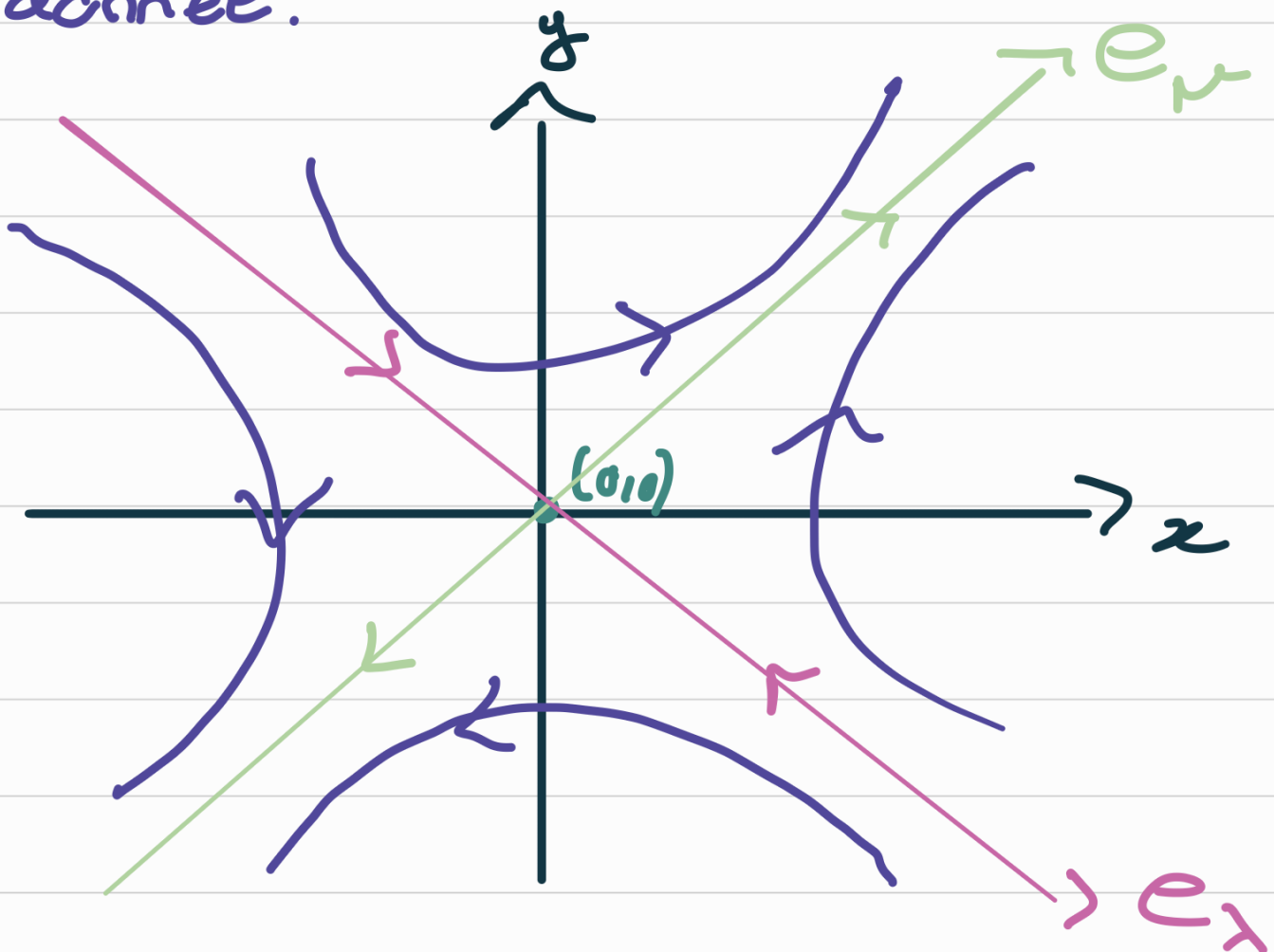
*

$$\lambda < 0 < \mu$$

Des courbes intégrales sont $\tilde{y} = C |\tilde{x}|^{\mu/\lambda}, C \in \mathbb{R}.$

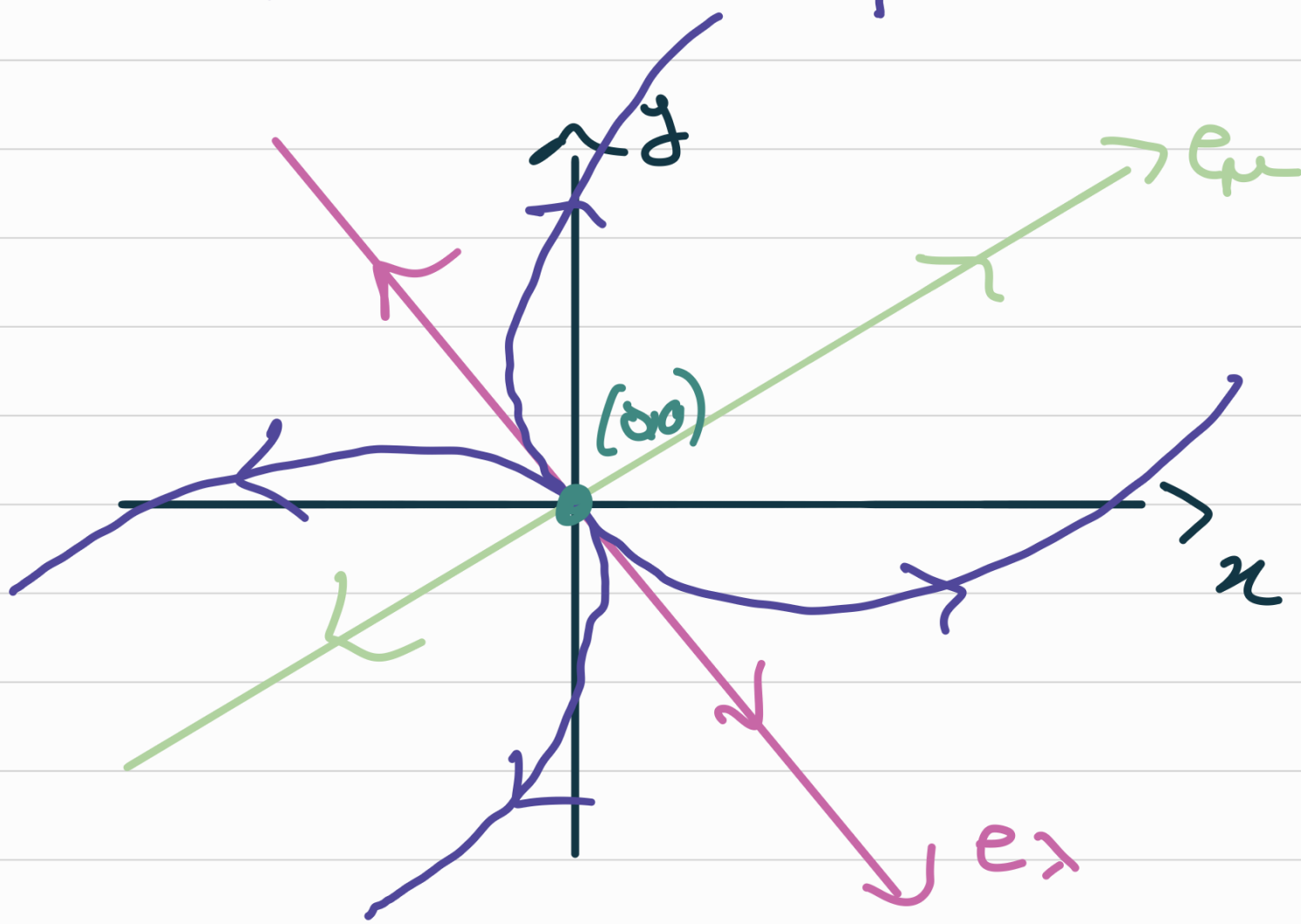
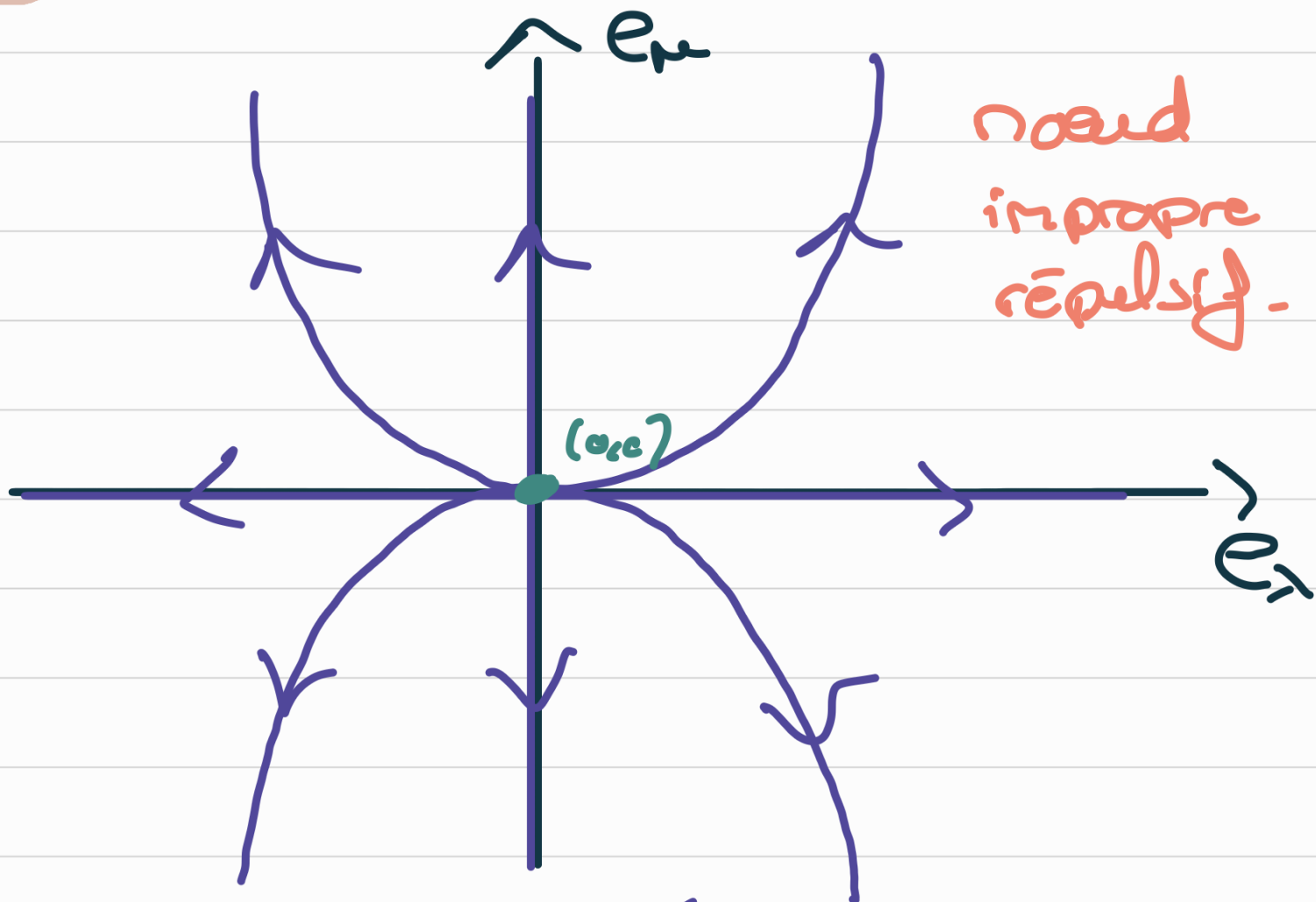


remarque : $|\lambda| < |\mu|$ donc e_x en abscisse et e_y en ordonnée.

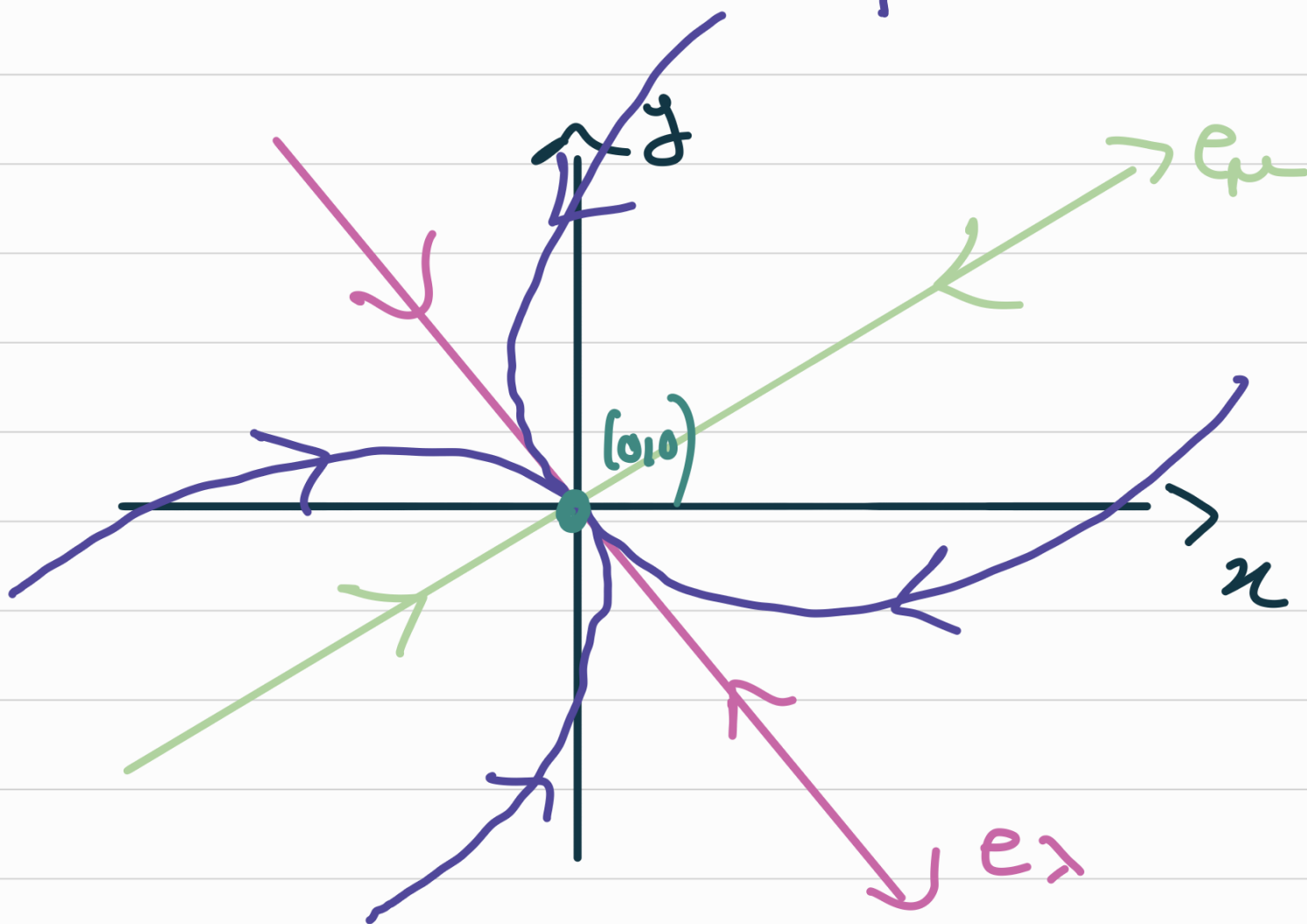
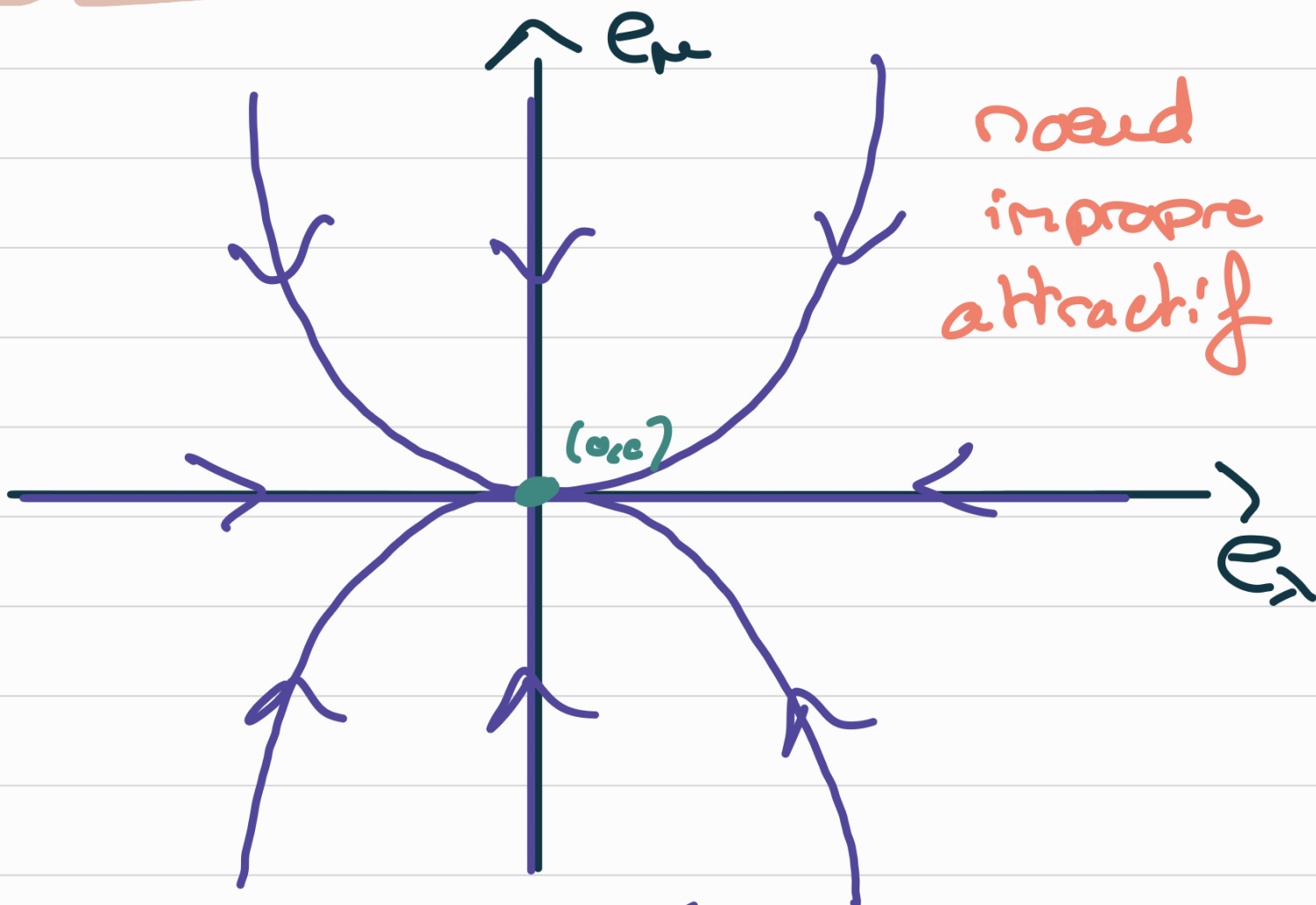


*

$$0 < \lambda < \mu$$



* $\lambda < \mu < 0$



• Cas 2 : Les valeurs propres sont réelles et A est non diagonalisable.

• A est semblable à $\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

• (e_1, e_2) base telle que

$$A e_1 = e_1 \quad \text{et} \quad A e_2 = e_1 + \lambda e_2.$$

• Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \\ \tilde{y}(t) = C_2 e^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\rightarrow C_2 = 0$

* $C_1 = C_2 = 0$

$\hookrightarrow$ curve integrate $\{(a, 0)\}$.

* $C_2 = 0, C_1 > 0$

$\hookrightarrow$ curve integrate $\{(\tilde{x}, 0) : \tilde{x} > 0\}$

* $C_2 = 0, C_1 < 0$

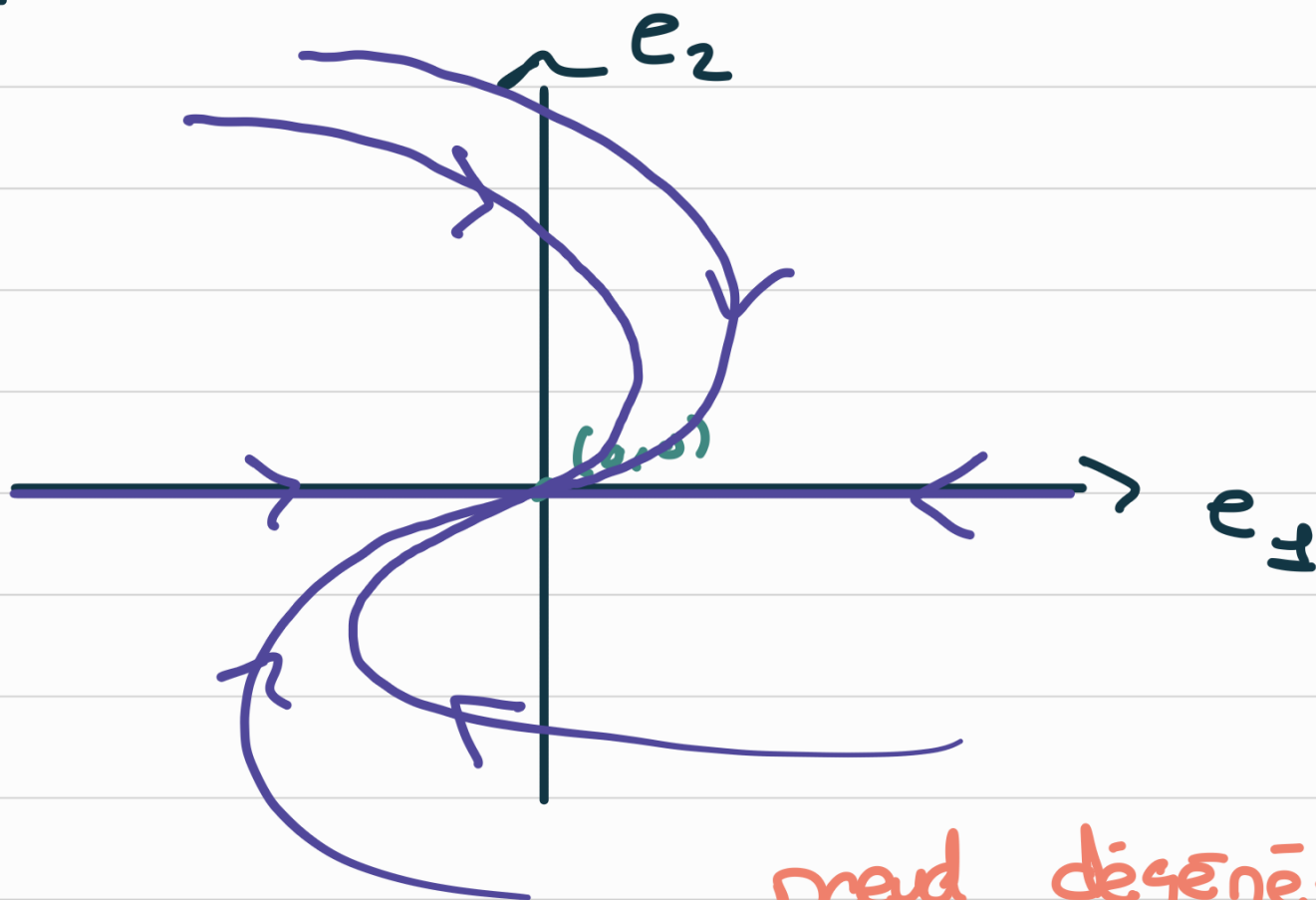
$\hookrightarrow$ curve integrate $\{(\tilde{x}, 0) : \tilde{x} < 0\}$

$$\rightarrow C_2 \neq 0$$

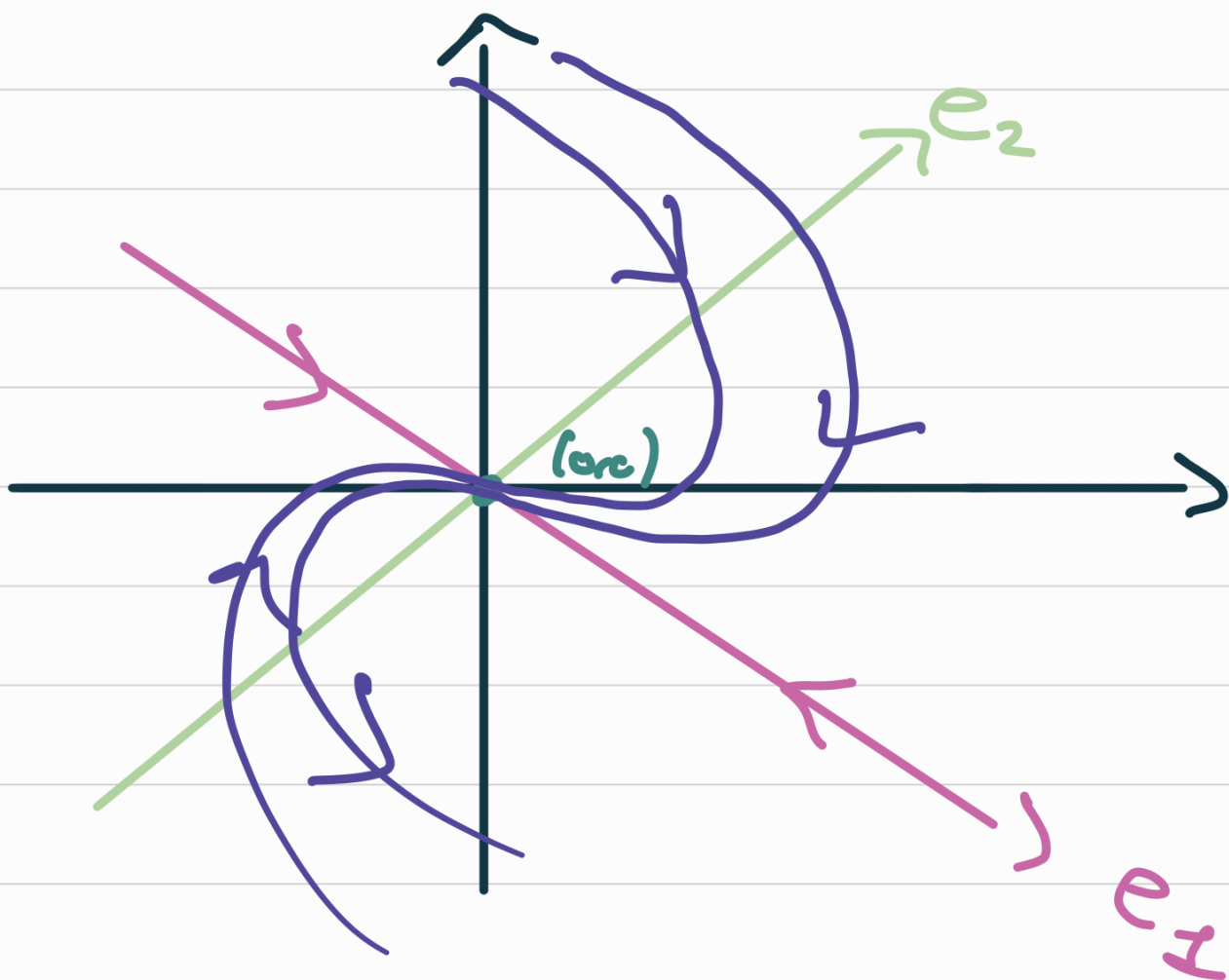
Les courbes intégrales sont

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = C \tilde{y} + \frac{1}{\lambda} \tilde{y} h(\tilde{y}) \\ \tilde{y}(t) = C \tilde{y} + \frac{1}{\lambda} \tilde{y} h(-\tilde{y}) \end{cases}$$

$$* \quad \lambda < 0$$

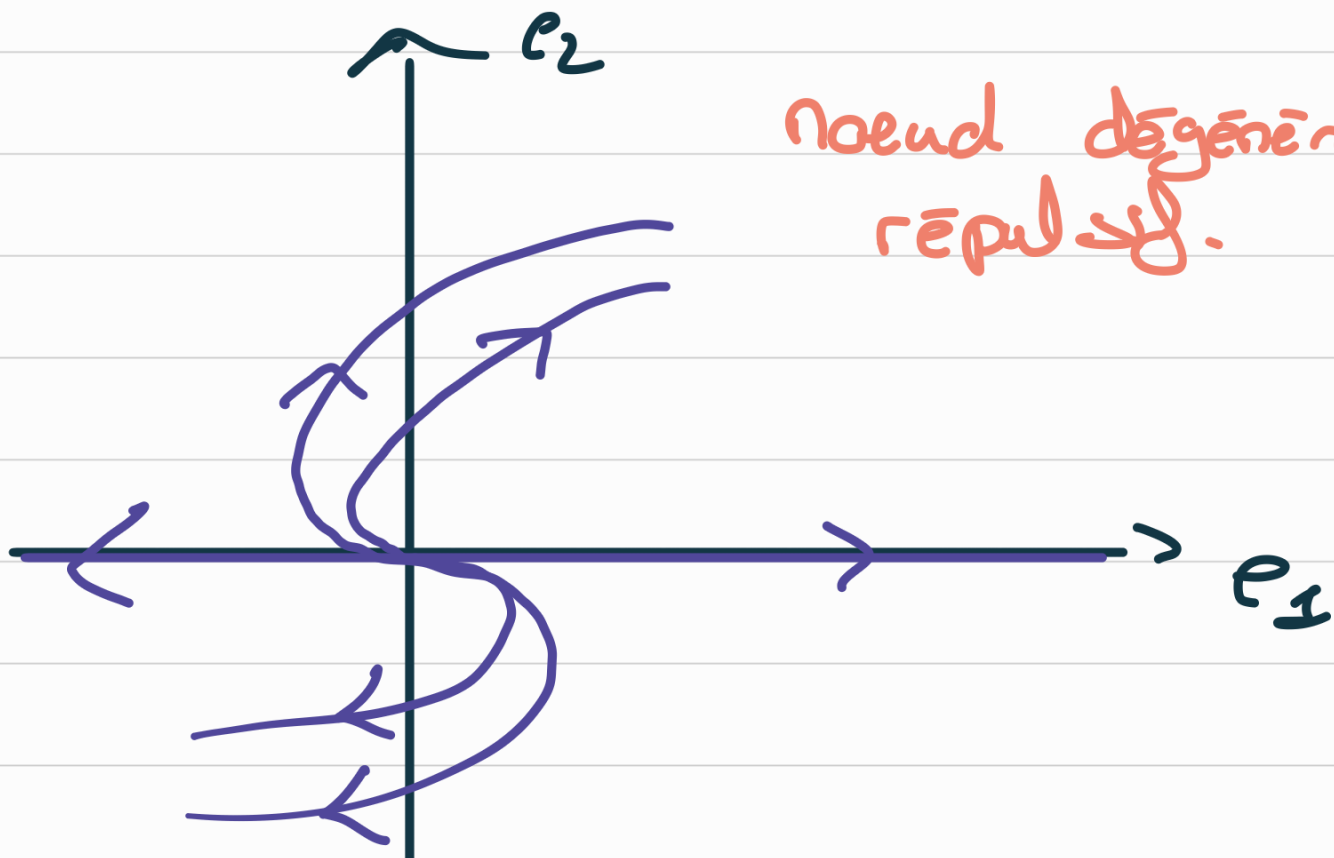


neud dégénère
attractif.

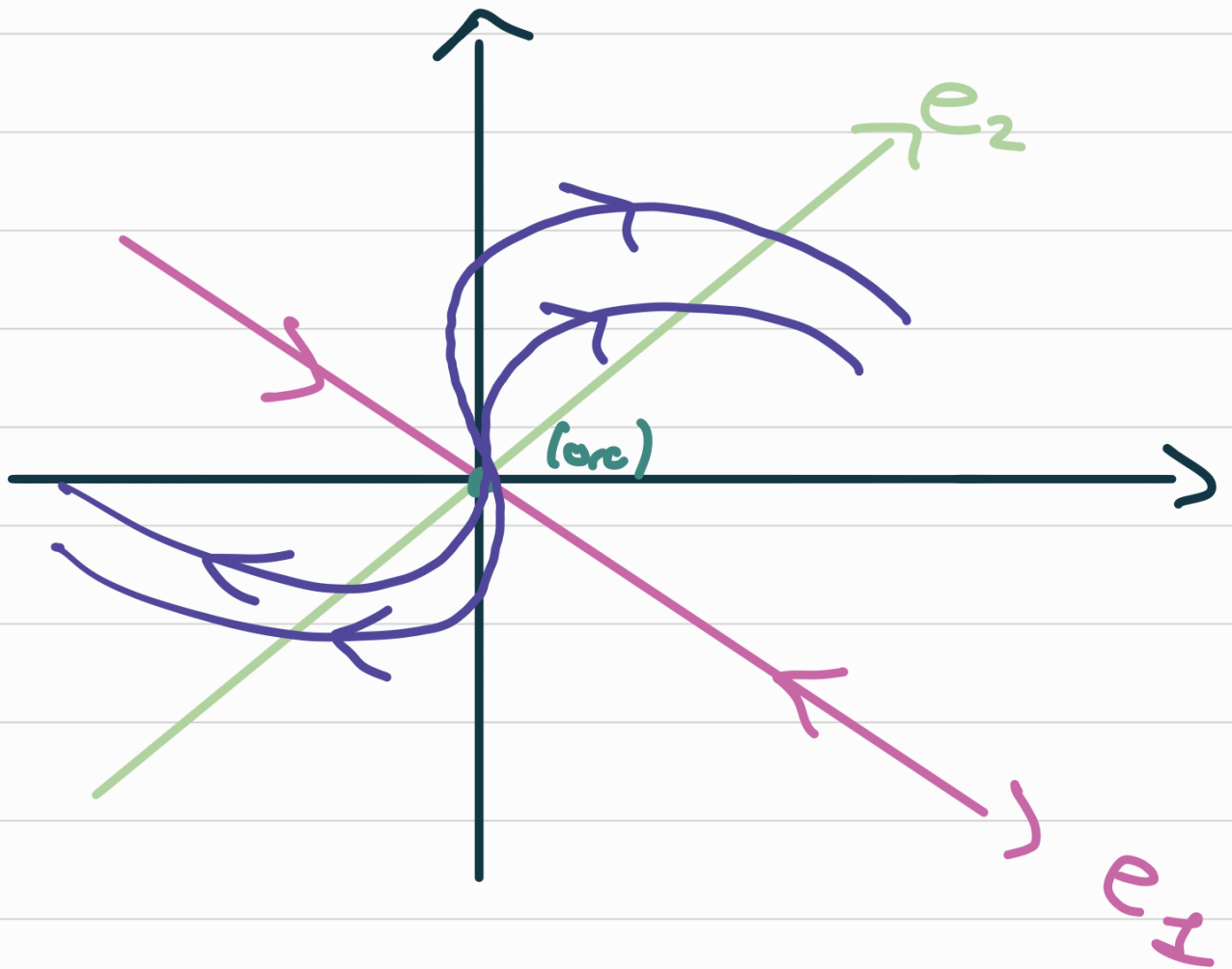


*

$\lambda > 0$



noend degeneré
répulsif.



• Cas 3 : Les valeurs propres sont complexes et A diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \lambda = \alpha + i\beta \\ \mu = \alpha - i\beta \end{cases}, \quad \beta > 0.$$

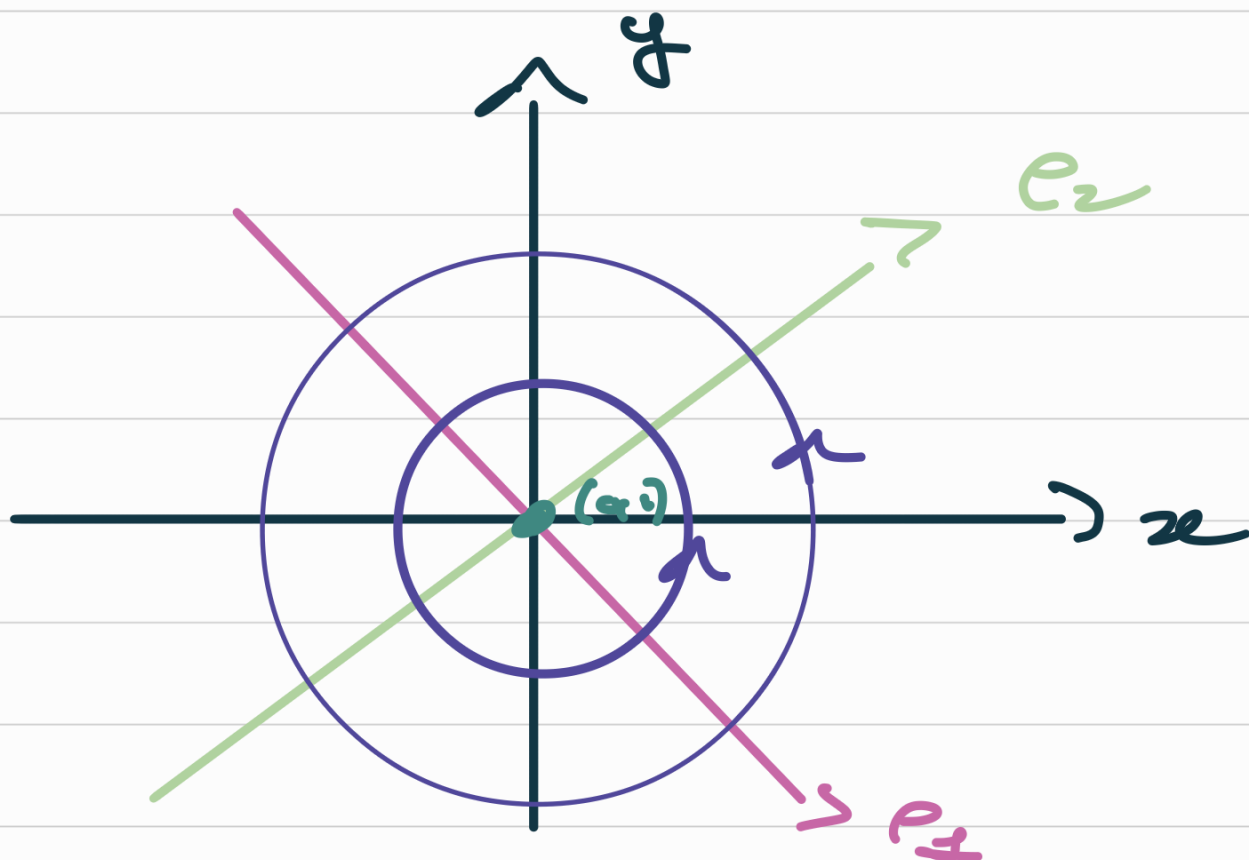
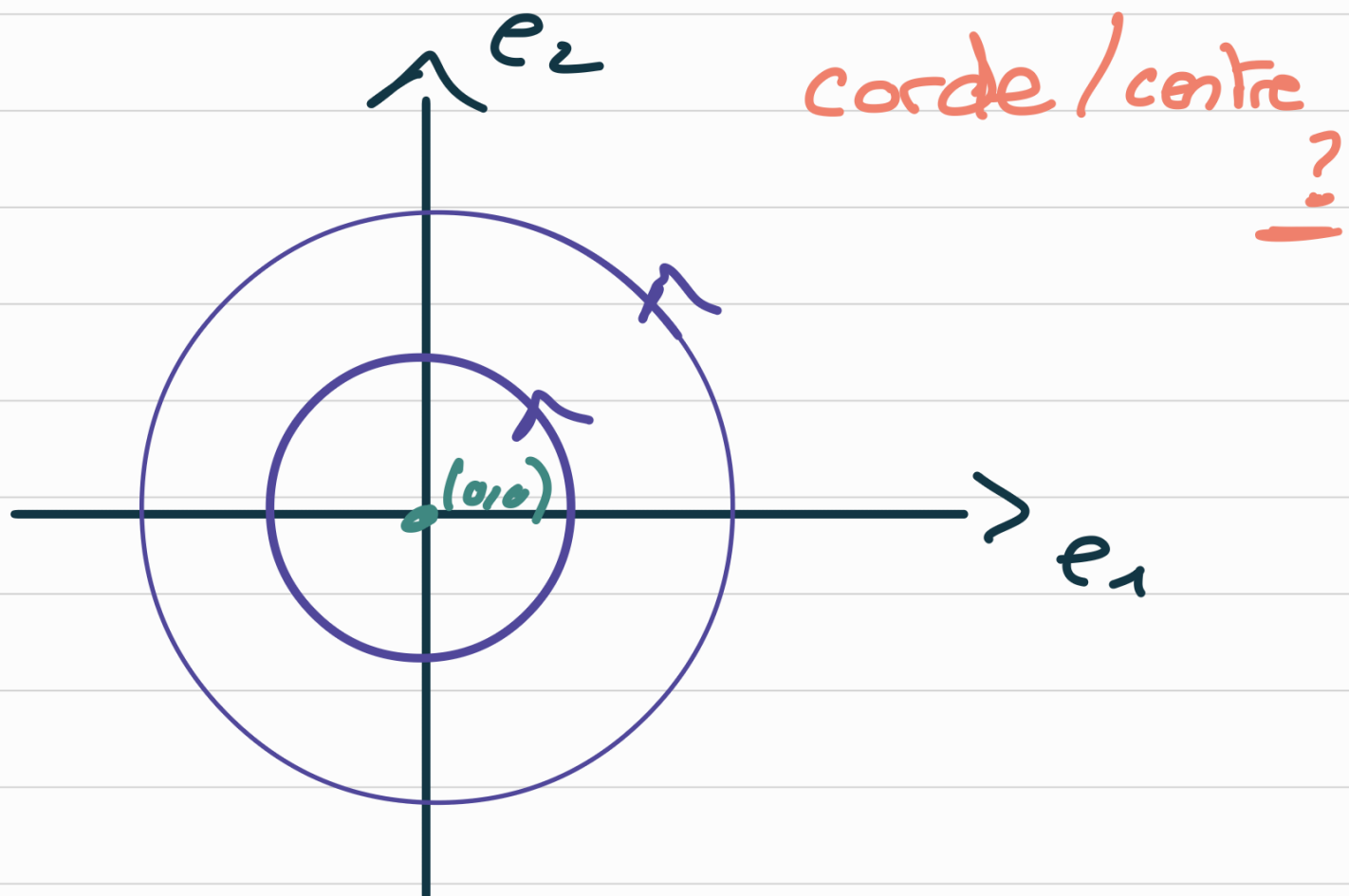
- A system $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 & -\beta \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$

- $e_1 = 2 \operatorname{Re}(e_\lambda)$

$$e_2 = -2 \operatorname{Im}(e_\lambda)$$

- $$\begin{cases} \tilde{x}(t) = e^{2t} \left(C_1 \cos(\beta t) - C_2 \sin(\beta t) \right) \\ \tilde{y}(t) = e^{2t} \left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t) \right) \end{cases}$$

$\rightarrow \lambda = 0 = \operatorname{Re}(\lambda)$



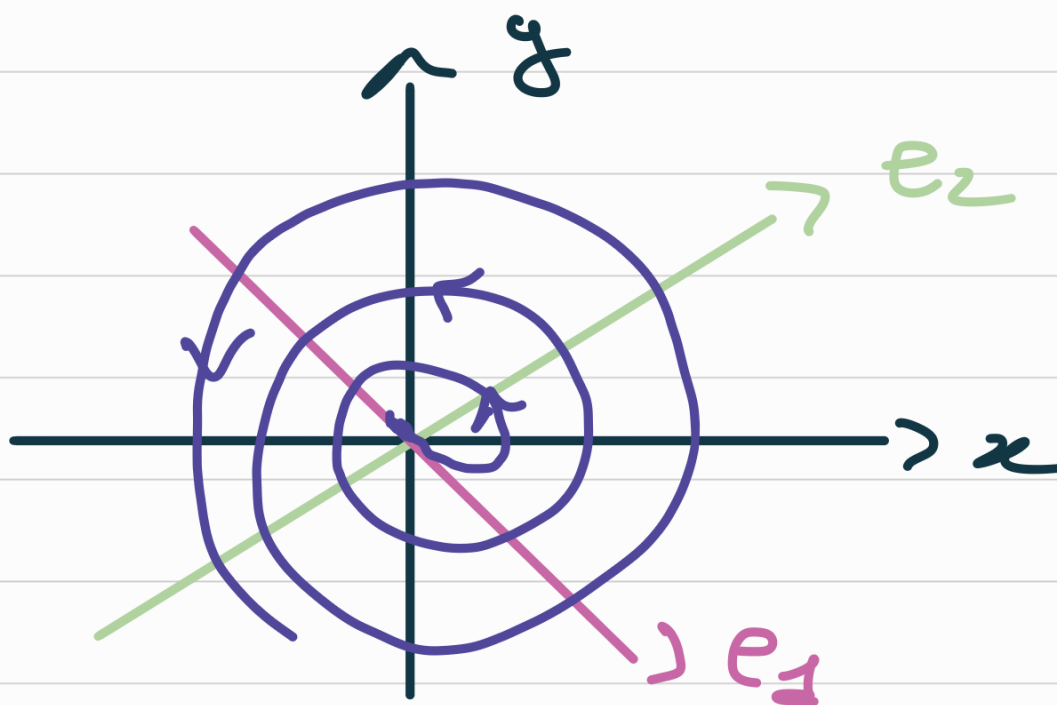
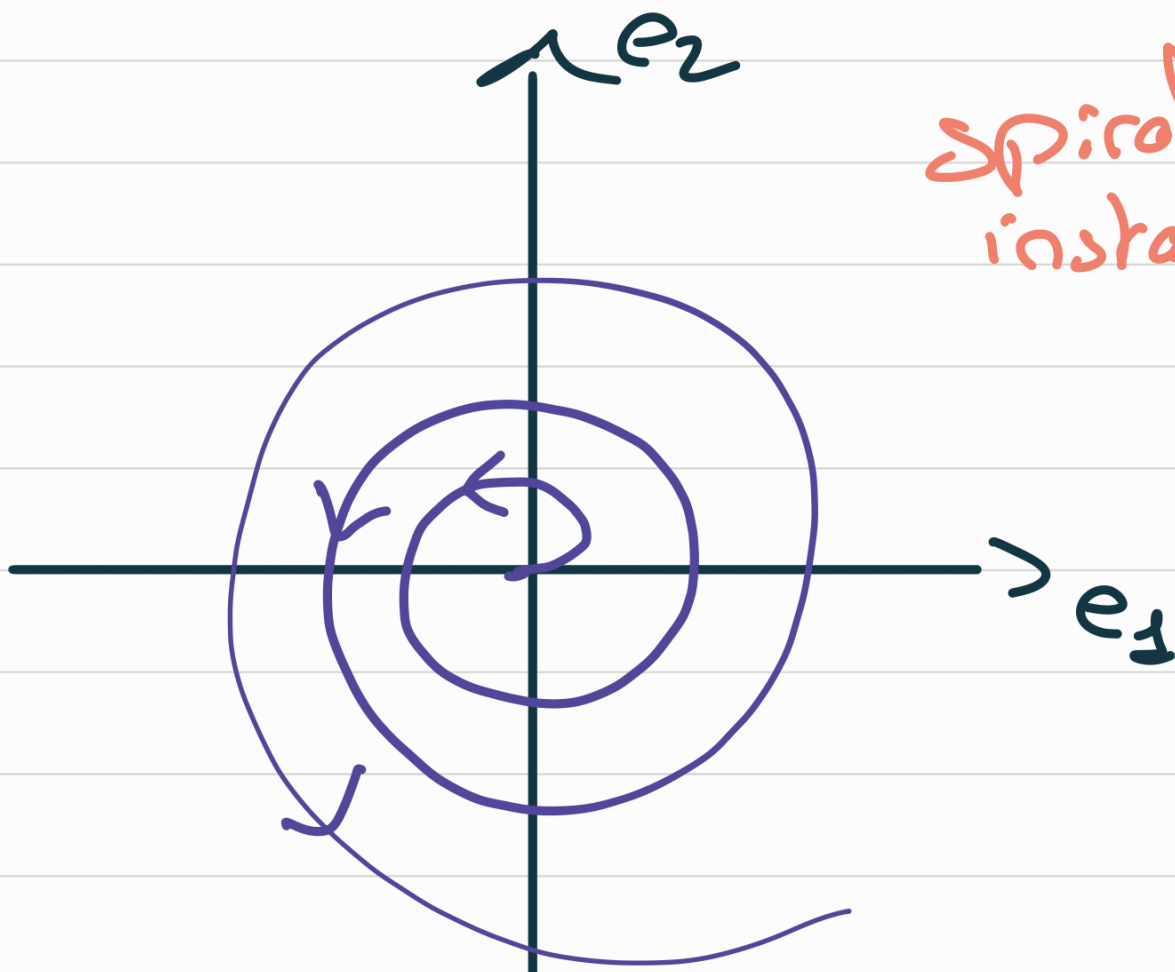
$\rightarrow$

$$\lambda \neq 0$$

*

$$\lambda > 0$$

spiral
instable



*

$$2 < 0$$

