

Réurrence

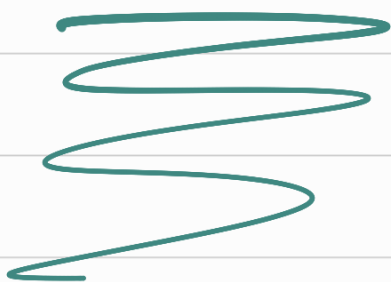
exercice :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{array} \right.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2^{n+1}}$.

Bonne nuit de début



Initialisation :

D'une part, $u_0 = 2$

D'autre part, $u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1}$

$$= \frac{2}{1} = 2.$$

donc la proposition est vraie
au rang $n = 0$.

Hérédité : $Baba \dots$

On veut montrer que :

$$u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}.$$

$$\text{on a : } u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

$$= \frac{2}{\frac{2n+1}{1 + \frac{2}{2n+1}}}$$

$$= \frac{2}{\frac{2n+1 + 2}{2n+1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}}$$

$$= \frac{2}{\cancel{2n+1}} \times \frac{\cancel{2n+1}}{2n+3}$$

$$= \frac{2}{2n+3}$$

donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Méthode : récurrence inégalité

① Hypothèse de récurrence
Es on considère un entier n tq
 $u_n \dots$

②

$u_{n+1} = 3u_n + 2$
ou $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 2} \Rightarrow$ constant

$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 1} \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n)$
 $u_{n+1} = e^{u_n + 3}$

Dérivée

Exercice 3 Dériver les fonctions dont les expressions sont données ci-dessous :

1. $f(x) = e^{3x^2+6x+1}$

2. $g(x) = 5(e^x + 3)^7$

3. $h(x) = 8\sqrt{5x^2 + x + 1}$

4. ~~$a(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$~~

1) $f'(x) = (6x + 6) e^{3x^2+6x+1}$

2) $g'(x) = 5 \times 7 \times e^x \times (e^x + 3)^6$
 $= 35e^x (e^x + 3)^6$

3) $h'(x) = \overset{=4}{8} \times \frac{(10x + 1)}{2\sqrt{5x^2 + x + 1}}$
 $= \frac{4(10x + 1)}{\sqrt{5x^2 + x + 1}} = \frac{40x + 4}{\sqrt{5x^2 + x + 1}}$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-8}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (2x-8) - \sqrt{x} \times 2}{(2x-8)^2}$$

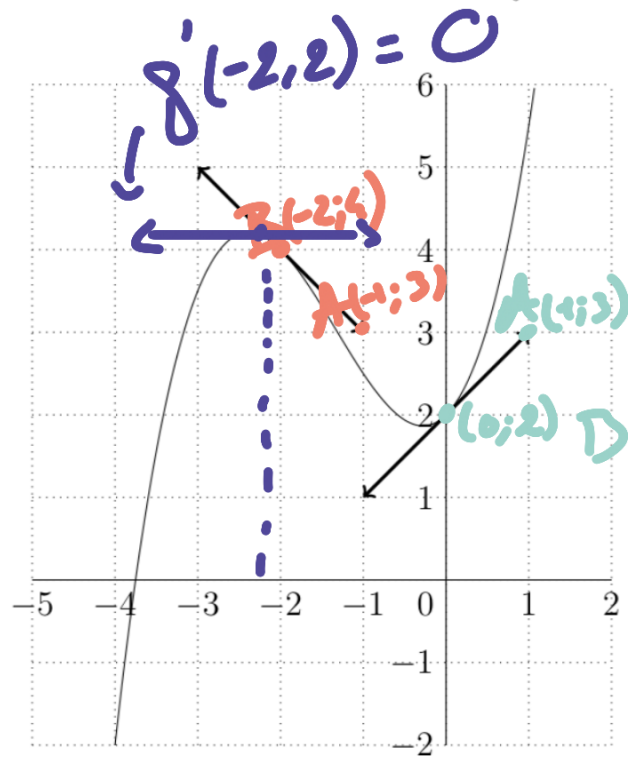
$$= \frac{2x-8 - 2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{(2x-8)^2}$$

$$= \frac{2x-8-4x}{2\sqrt{x}(2x-8)^2}$$

$$= \frac{-2x-8}{2\sqrt{x}(2x-8)^2}$$

$$= \frac{-x-4}{\sqrt{x}(2x-8)^2}$$

Exercice 7 On considère ci-dessous la courbe d'une fonction f et ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 0 .



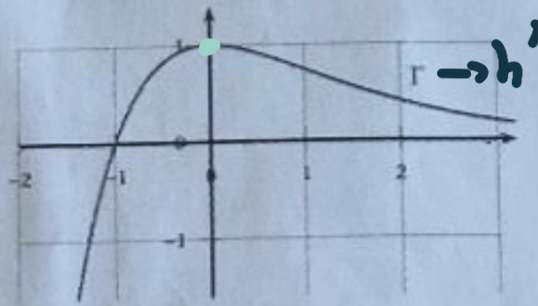
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Donner sans justification $f'(-2)$ et $f'(0)$.

$$\bullet f'(-2) = \frac{4 - 3}{-2 - (-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\bullet f'(0) = \frac{2 - 3}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

3. On considère une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note h' sa fonction dérivée.
On note C_h la courbe représentative de h et Γ la courbe représentative de h' .
La courbe Γ est tracée ci-dessous :



On note T_0 la tangente à la courbe C_h au point d'abscisse 0.

On peut affirmer que la tangente T_0 est parallèle à la droite d'équation :

(a) $y = x$

(b) $y = 0$

(c) $y = 1$

(d) $x = 0$

• deux droites sont parallèles
ssi leur coefficient directeur
est égal.

→ coeff. directeur T_0 .

$$f'(0) = 1$$

↳ T_0 est parallèle aux
droites de la forme

$$y = x + b$$

• $f(x) = (ax + b) e^{\lambda x}$

$$b \Rightarrow f(a)$$

$$a \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\lambda \Rightarrow f'(a)$$

