

Algèbre

Exercice 11 ★★★★★ - Base duale ♡ [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▾

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E . Soient f_1^*, f_2^* et f_3^* les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, \quad f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, \quad f_3^* = e_1^* + 3e_2^*.$$

Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et déterminer la base (f_1, f_2, f_3) de E dont elle est la base duale.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad L_3 - L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad L_1 - 2L_2$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= - (3 + 10)$$

$$= -13 \neq 0$$

donc (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est
une base de E^* .

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \text{ (Kronecker)}$$

on pose :

$$f_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3.$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_1^*(\mathcal{J}_1) = 1 \\ \mathcal{J}_2^*(\mathcal{J}_1) = 0 \\ \mathcal{J}_3^*(\mathcal{J}_1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma = 1 - 2\alpha - \beta \\ -\alpha + 2 - 4\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha = -3\beta \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 2\beta \\ 3\beta + 2 + 12\beta - 2\beta = 0 \\ \alpha = -3\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \frac{12}{13} + \frac{2}{13} = \frac{3}{13} \\ \beta = -\frac{2}{13} \\ \alpha = -3\beta = \frac{6}{13} \end{cases}$$

donc $f_1 = \frac{6}{13} e_1 - \frac{2}{13} e_2 + \frac{3}{13} e_3$

De même pour f_2 et f_3 .

feuille 3

exercice 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 3$$

donc (f_1, f_2, f_3) base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

• an gate $\varepsilon_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(\varepsilon_1) = 1 \\ g_2(\varepsilon_1) = 0 \\ g_3(\varepsilon_1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta - \gamma = 1 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta - \gamma = 1 \\ -2\beta = -1 \\ -2\gamma = -1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

donc $\varepsilon_1 = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

De même, ε_2 et ε_3 .

exercice 2:

1). $\text{card}(\phi_0, \dots, \phi_n) = n+1$ et
 $\dim(E^*) = \dim(E) = n+1$

Montrons que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est
fibre.

on pose $Q_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$

• $Q_i(a_i) \neq 0$ et $Q_i(a_j) = 0$
Car $a_i \neq a_j$ $j \neq i$

on pose :

$$P_i(x) = \frac{Q_i(x)}{Q_i(a_i)}$$

$$= \prod_{j \neq i} \frac{(x - a_j)}{a_i - a_j}$$

on a :

$$\phi_j(P_i) = P_i(a_j)$$
$$= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle
que $\lambda_0 \Phi_0 + \dots + \lambda_n \Phi_n = 0$

on évalue P' égale en a_i ; $i = 0, \dots, n$.

$$\lambda_0 \Phi_0(a_i) + \dots + \lambda_n \Phi_n(a_i) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0, \text{ car } \left. \begin{array}{l} \Phi_i(a_i) = 1 \\ \Phi_j(a_i) = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } i = 0, \dots, n.$$

Donc $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ est libre et fermé donc une base de E^* .

De plus, la base antédurale est $(P_0, \dots, P_n)$.

2) Soit $P \in E$.

$$P = \sum_{k=0}^n \Phi_k(P) P_k.$$

exercice 5 :

$$P e_i \rightarrow d_i \quad \text{et} \quad P^* e_i^* \rightarrow d_i^*$$

$$P^* = {}^t(P^{-1}) = ({}^t P)^{-1}$$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

$\hookrightarrow H$ est un hyperplan de E si H est un sev de E et $\dim H = n-1$

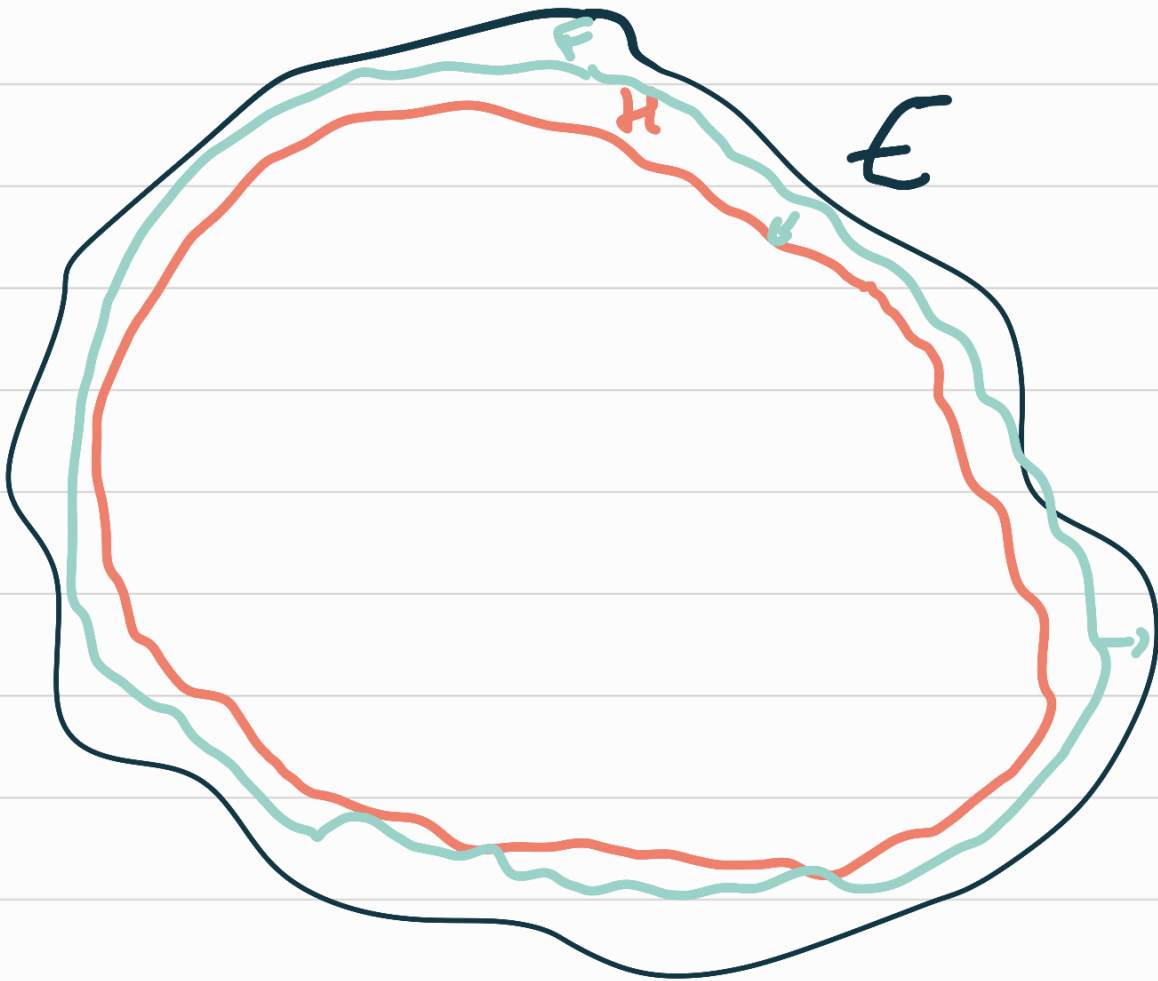
$$\hookrightarrow H = \left\{ x \in E : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = c \right\}$$

$\hookrightarrow (x_1, \dots, x_n)$

ξ , H est un hyperplan si
 H est un sev maximal de E



Si F sev de E et
 $H \subset F$, alors $F=H$
ou $F=E$



ξ , un hyperplan H de E
est le noyau d'une forme

Pinéaire non nulle de E .

exercice 7:

3). $P_1 = \ker(\phi_1)$

$$\hookrightarrow \phi_1(x, y, z) = x + y + z$$

• $P_2 = \ker(\phi_2)$

$$\hookrightarrow \phi_2(x, y, z) = 2x + 3y.$$

or ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas proportionnelles, donc $\ker(\phi_1) \neq \ker(\phi_2)$ d'après la question 1.

Donc $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ et D qui est l'intersection de deux plans distincts est une droite.

$$\bullet \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \text{Vect} \{ (-3; 2; 1) \}.$$

on pose $\mathcal{P} = \text{Vect} \{ (-3; 2; 1); (1, 1, 1) \}$

$\vec{n}(x, y, z)$ normal to Γ .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot (-3, 2, 1) = 0 \\ \vec{n} \cdot (1, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{$

$\vec{n} \rangle$.