

Droites perpendiculaires

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2; 5; 1)$, $B(3; 2; 3)$ et $C(3; 6; 2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

► Afficher/Masquer la solution

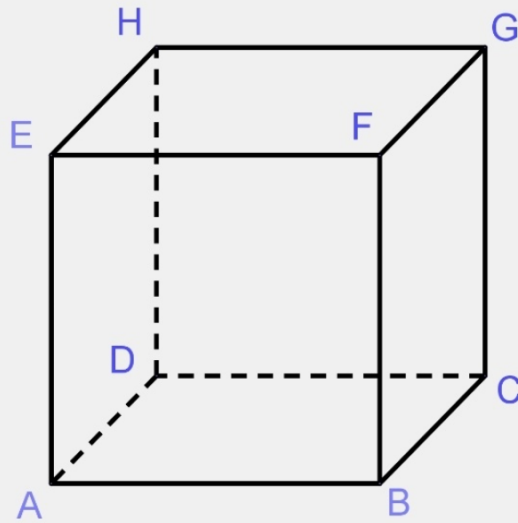
1) $\vec{AB}(1; -3; 2)$
 $\vec{AC}(1; 1; 1)$

2) • deux droites sont orthogonales si :
Leur vecteur directeur sont orthogonaux.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \times 1 + (-3) \times 1 + 2 \times 1 \\ = 1 - 3 + 2 = 0$$

donc Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

On se place dans un cube $ABCDEFGH$.



1. Quelle est la nature du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?
2. Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$
4. Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

1) un repère orthonormé

2) $F(1; 0; 1)$

$D(0; 1; 0)$

$B(1; 0; 0)$

$H(0; 1; 1)$.

$$3) \vec{DF} (1; -1; 1)$$

$$\vec{DH} (-1; 1; 1)$$

$$4) \vec{DF} \cdot \vec{DH} = 1 \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times 1$$

$$= -2 + 1 = -1 \neq 0$$

donc les droites (DF) et (DH) ne sont pas perpendiculaires.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Montrer que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

• $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$

Si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

avec $(\vec{u}, \vec{v})$ couple directeur du plan $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{u} \cdot \vec{v}_1 &= 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 2 \times 1 \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{u} \cdot \vec{v}_2 &= 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 2 \times (-2) \\ &= 6 - 2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

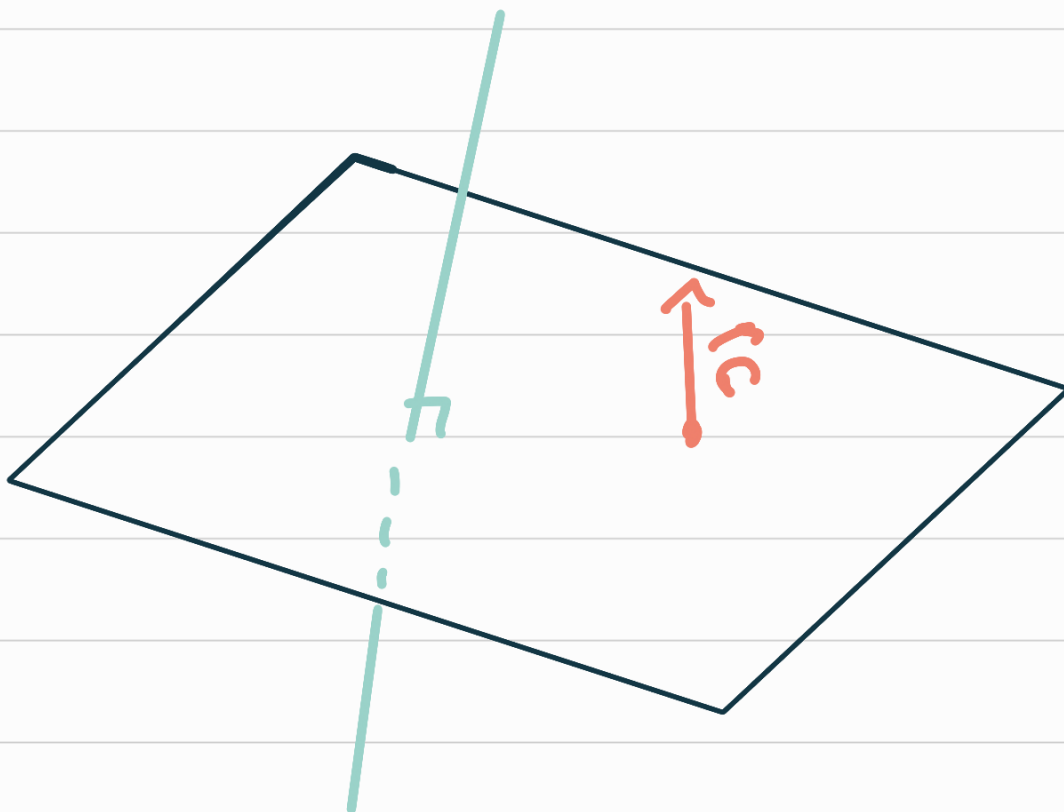
donc $\vec{u}$ est orthogonal à
deux vecteurs directeurs de P ,
donc $\vec{u}$ est un vecteur
normal de P .

Exercice 2:

Soient $A(2; 3; -5)$, $B(7; -1; 2)$, $C(1; -1; 0)$ et $D(0; 11; 1)$ quatre points de l'espace.

1. Démontrer que les points A , B et C définissent un plan.
2. Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?
3. Les droites (AB) et (AD) sont-elles perpendiculaires ?
4. Les droites (BC) et (AD) sont-elles orthogonales ?
5. Démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) .

• une droite est orthogonale à un plan si un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal du plan



- $\vec{AD}(-2; 8; 6)$

- $\vec{n}(1; -4; -3)$ normal?

$$\vec{AB}(5; -4; 7)$$

$$\vec{AC}(-1; -4; 5)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 1 \times 5 + (-4) \times (-4) + (-3) \times 7$$

$$= 5 + 16 - 21$$

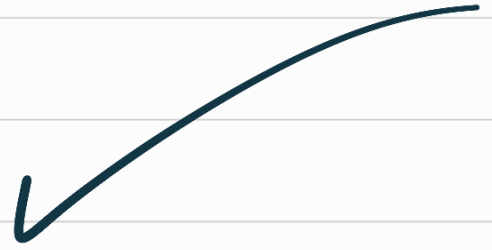
$$= 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{n} = -1 \times 1 + -4 \times -4 + -3 \times 5$$

$$= -1 + 16 - 15 = 0$$

$$\bullet \quad -\frac{2}{1} = -2$$

$$\frac{8}{-4} = -2$$



$$\frac{6}{-3} = -2$$

donc les vecteurs $\vec{AD}$
 et $\vec{n}$ sont colinéaires et
 donc la droite (AD) et le
 plan (ABC) sont orthogonaux.

• une droite est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si un vecteur directeur de la droite est normal au plan ($\mathcal{P}$).

$$\begin{cases} \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{AD} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ donc la droite (AD) et le plan (ABC) sont orthogonaux.

Exercice 6:

On considère les points $A(8; -1; 3)$, $B(19; 10; 4)$ et le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Démontrer que le point $H(9; 0; -1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.
2. Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.
3. En déduire la distance du point B au $\mathcal{P}$.
4. Justifier que $C(9; 6; 7)$ est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC) .
5. En déduire la distance du point H à la droite (BC) .

1) $\vec{AH} (1; 1; -4)$

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{n} &= 1 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times (-4) \\ &= 2 + 2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

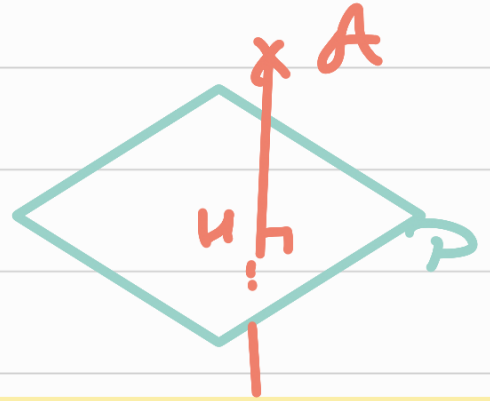
donc H appartient au plan $\mathcal{P}$.



• un point H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ si :

$$\rightarrow H \in \mathcal{P}$$

$$\rightarrow (AH) \perp \mathcal{P}$$



$$\text{or } \vec{HD}(-10; -10; -5)$$

$$\text{et } \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

donc les vecteurs $\vec{0}$ et $\vec{HB}$ sont colinéaires. Donc la droite (HB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

De plus, $H \in \mathcal{P}$, donc H est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{P}$.

3) La distance de A au plan $\mathcal{P}$ est la distance entre A et le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{225} \\ &= 15. \end{aligned}$$

Exercice 6:

On considère les points $A(8; -1; 3)$, $B(19; 10; 4)$ et le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Démontrer que le point $H(9; 0; -1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.
2. Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.
3. En déduire la distance du point B au $\mathcal{P}$.
4. Justifier que $C(9; 6; 7)$ est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC) .
5. En déduire la distance du point H à la droite (BC) .

4)

• un point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) si :

$$\rightarrow H \in (d)$$

$$\rightarrow (AH) \perp (d)$$



$$\bullet C \in (BC)$$

$$\bullet \vec{CH}(0; -6; -8)$$

$$\vec{DC}(-10; -4; 3)$$

$$\vec{CH} \cdot \vec{CB} = 0 \times (-10) + -6 \times -4 + 3 \times -8$$

$$= 24 - 24 = 0$$

donc les droites (CH) et (CB) sont orthogonales, et donc C est le projeté de H sur (BC) .

$$\begin{aligned} 5) \quad CH &= \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{100} = 10. \end{aligned}$$

La distance de A à la droite (d) est la distance entre A et le projeté orthogonal H de A sur (d) .