

Equations Différentielles

- une Équation autonome est de la forme :

$$y' = f(y)$$

avec la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui se nomme le champ de vecteur de l'équation.

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,
définie par :

$$f(x, y) = (f_1(x, y) ; f_2(x, y))$$

• on définit les **isodines**:

$$\rightarrow I_v = \{(x, y) \in \Omega : f_1(x, y) = 0\}$$

$$\rightarrow I_h = \{(x, y) \in \Omega : f_2(x, y) = 0\}$$

méthode: tracer les champs
de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

⚠ Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{I_v \cup I_h\}$

① $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$: ↗

② $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$: ↖

③ $f_1 > 0$ et $f_2 < 0$: ↘

④ $f_1 < 0$ et $f_2 < 0$: ↙

- un point stationnaire y^* est dit stationnaire si $f(y^*)=0$

cas $\mathbb{R}^2$: (x^*, y^*) est un point stationnaire si:

$$\begin{cases} f_1(x^*, y^*) = 0 \\ f_2(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$



remarque: en général le point stationnaire c'est $(0,0)$.

Portrait de phase

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

• on pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tels que $Y' = AY$.

• Le point stationnaire est $(0, 0)$.

• Cas 1: Les valeurs propres de A sont réelles et la matrice est diagonalisable.

On note $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ les valeurs propres de A et on note E_λ et E_μ les espaces propres associés.

Les solutions sont de la forme:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = C_1 e^{\lambda t} \\ \tilde{y}(t) = C_2 e^{\mu t} \end{cases}$$

* $C_1 = C_2 = 0$

Le singleton $\{(0,0)\}$ est la seule courbe intégrale.

$$* C_1 = 0, C_2 > 0$$

La courbe intégrale est la demi-droite $\{(0, \tilde{y}) : \tilde{y} > 0\}$

$$* C_1 = 0, C_2 < 0$$

La courbe intégrale est la demi-droite $\{(0, \tilde{y}) : \tilde{y} < 0\}$

$$* C_1 > 0, C_2 = 0$$

La courbe intégrale est la demi-droite $\{(\tilde{x}, 0) : \tilde{x} > 0\}$

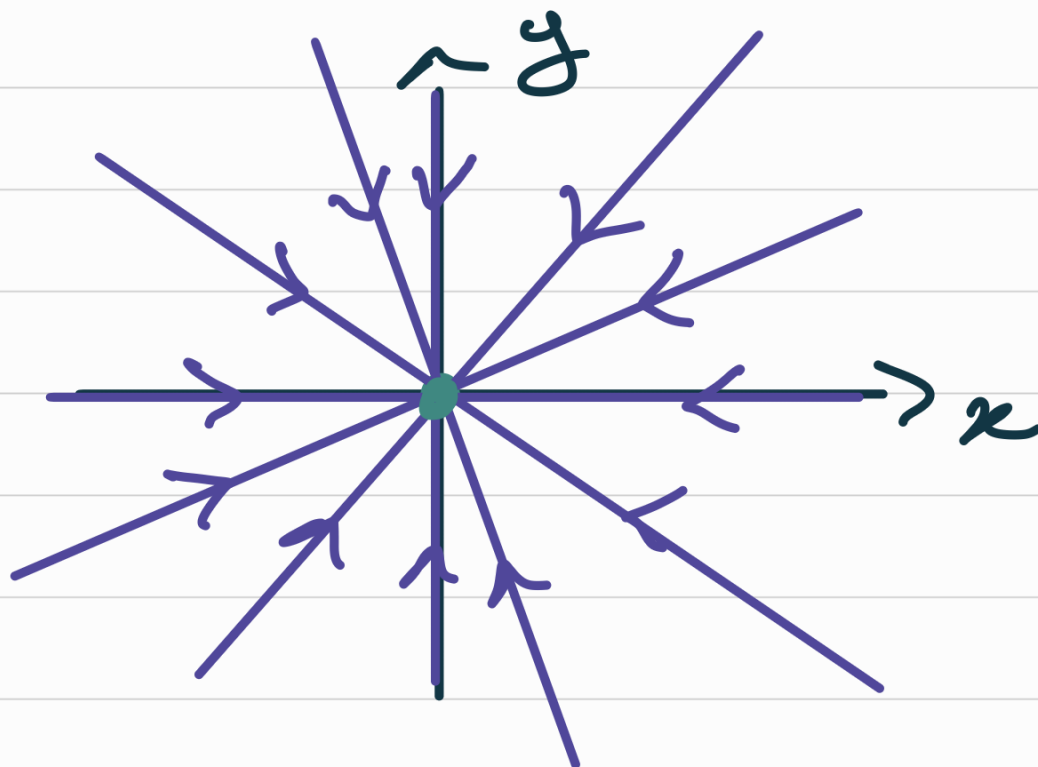
$$* C_1 < 0, C_2 = 0$$

La courbe intégrale est la demi-droite $\{(\tilde{x}, 0) : \tilde{x} < 0\}$

*

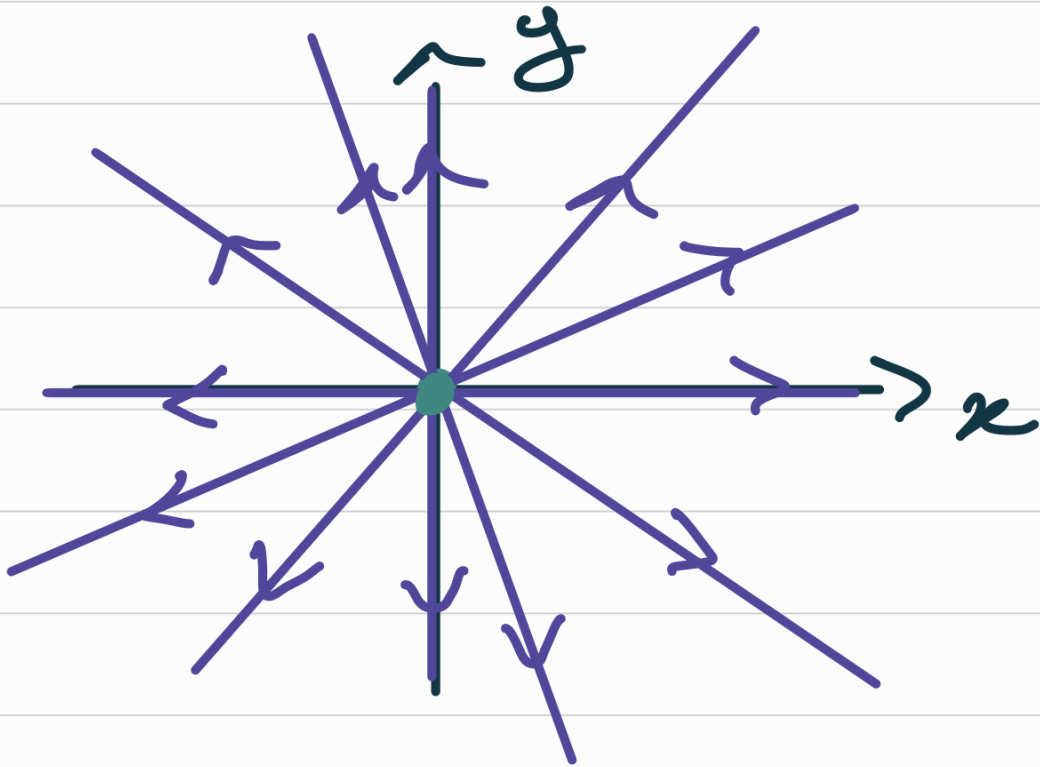
$$C_1 C_2 \neq 0$$

$$\textcircled{\pm} \quad \lambda = \mu < 0$$



noend propre attractif

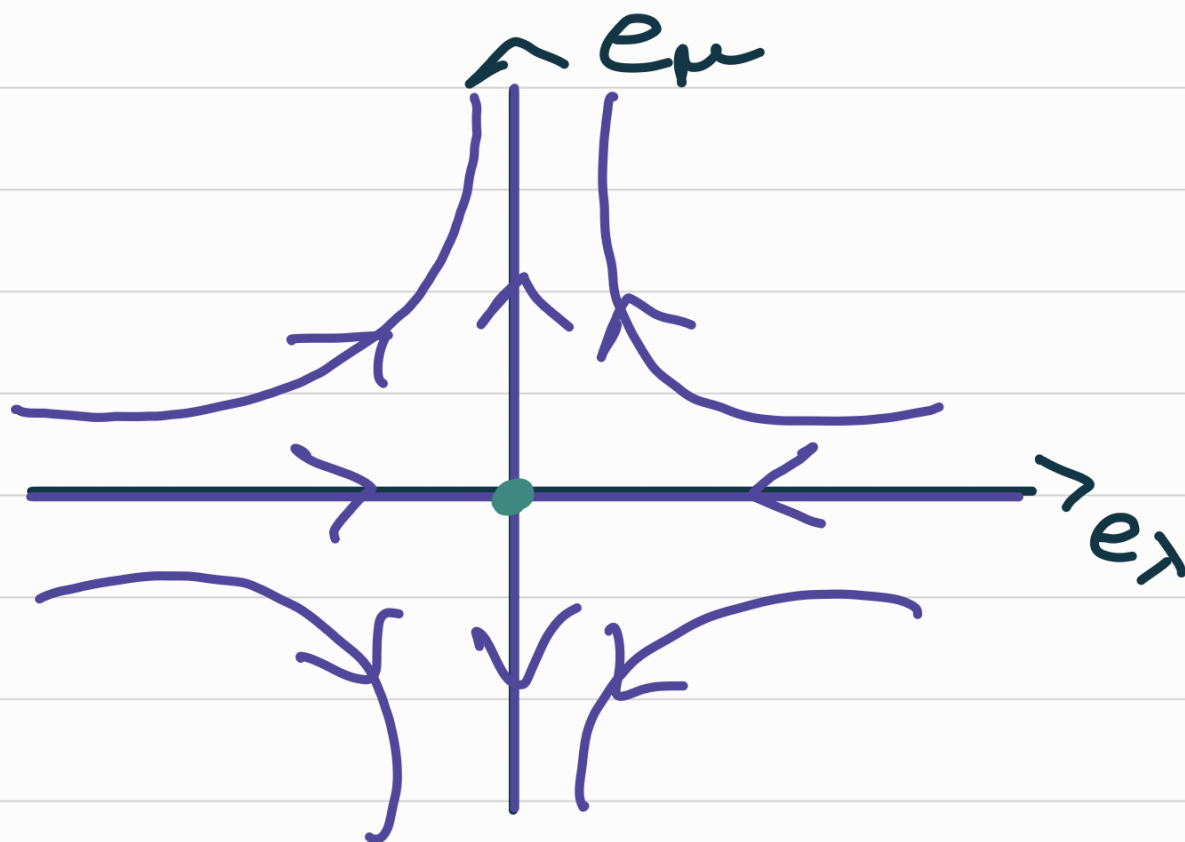
② $\lambda = \mu > 0$



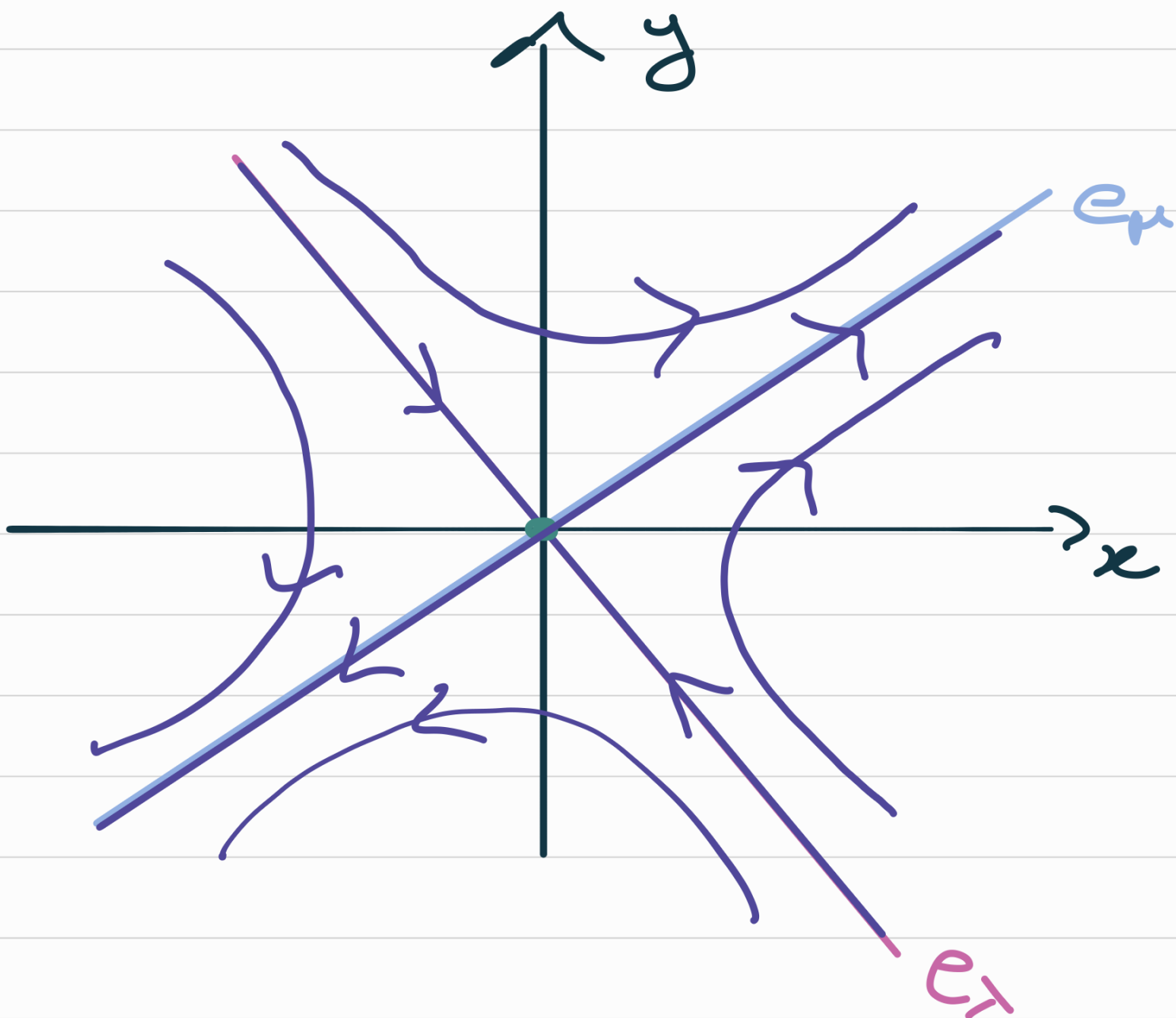
noeud propre répulsif.

③

$$\lambda < 0 < \mu$$



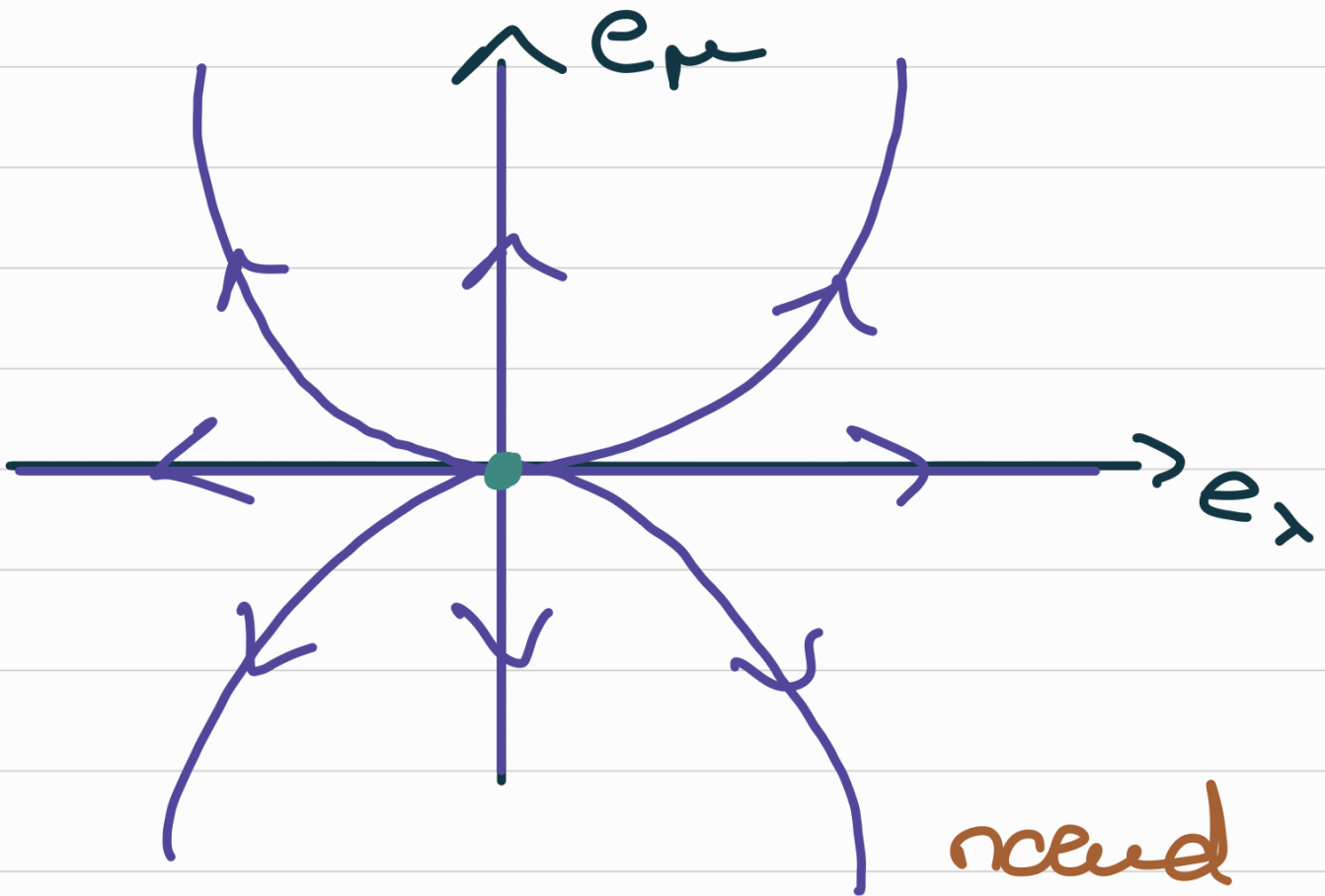
Le vecteur propre
sur l'axe horizontal correspond
à la valeur propre la
plus petite en valeur absolue



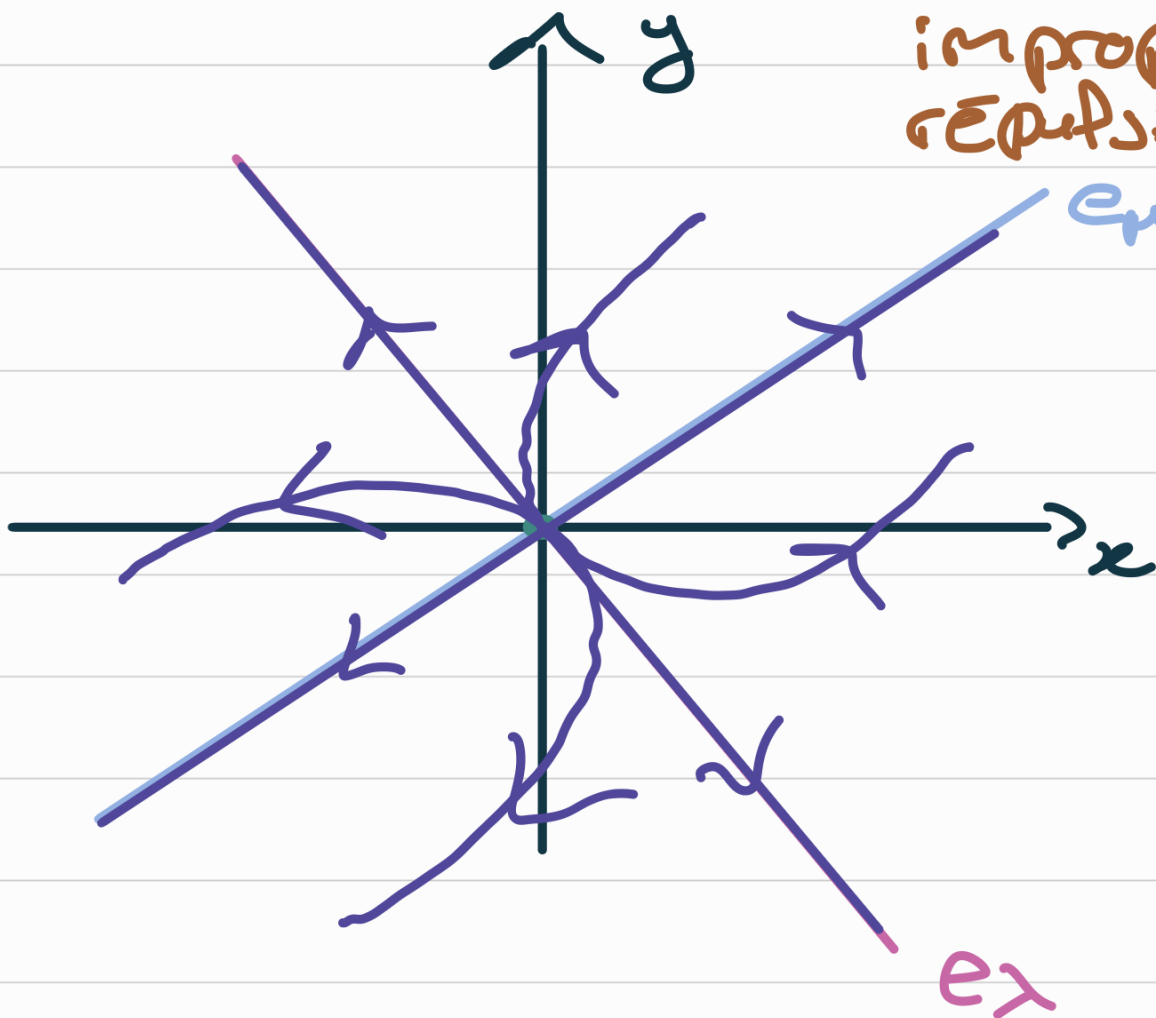
point selle

④

$$0 < \lambda < \mu$$

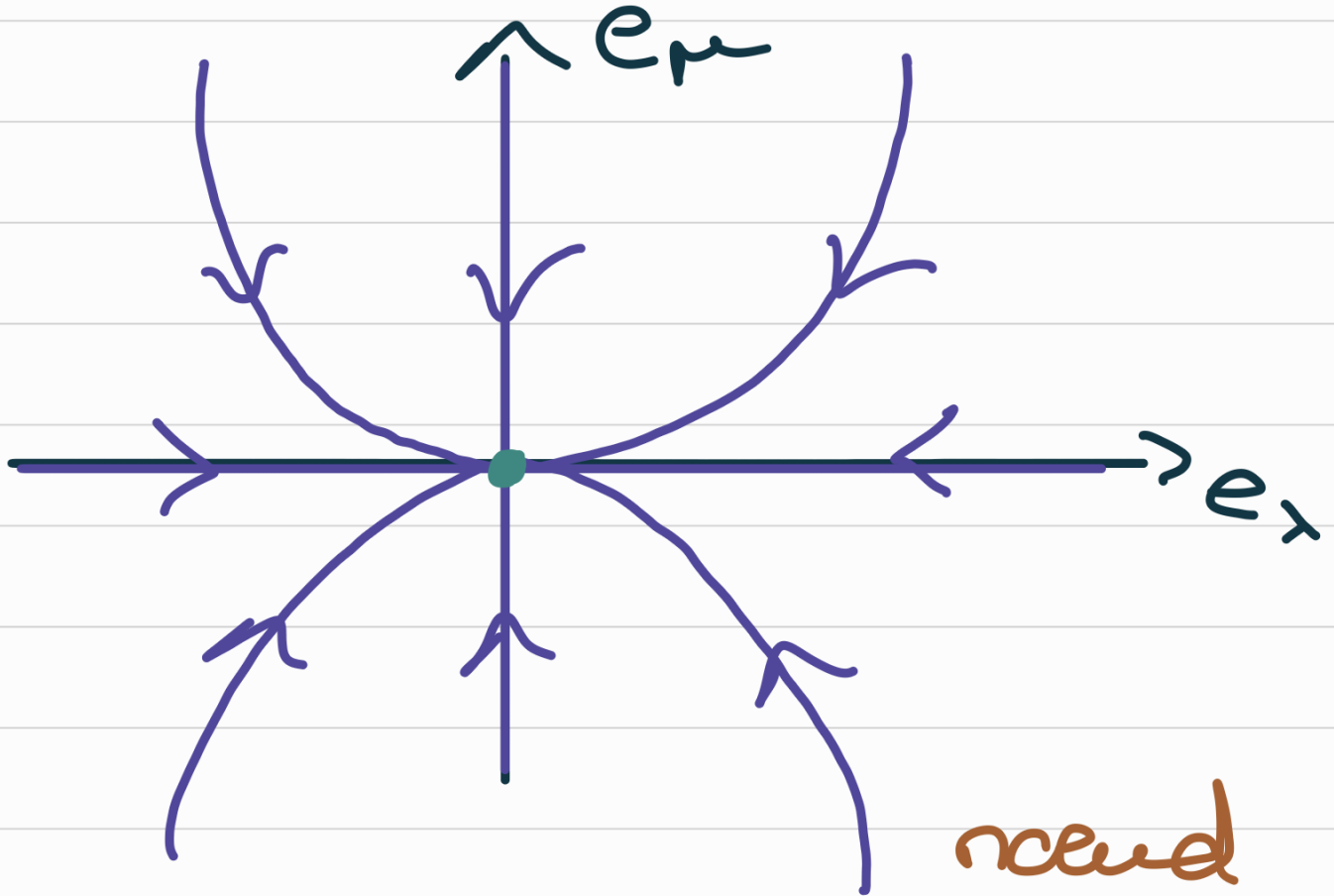


need
improper
results if
 e_μ

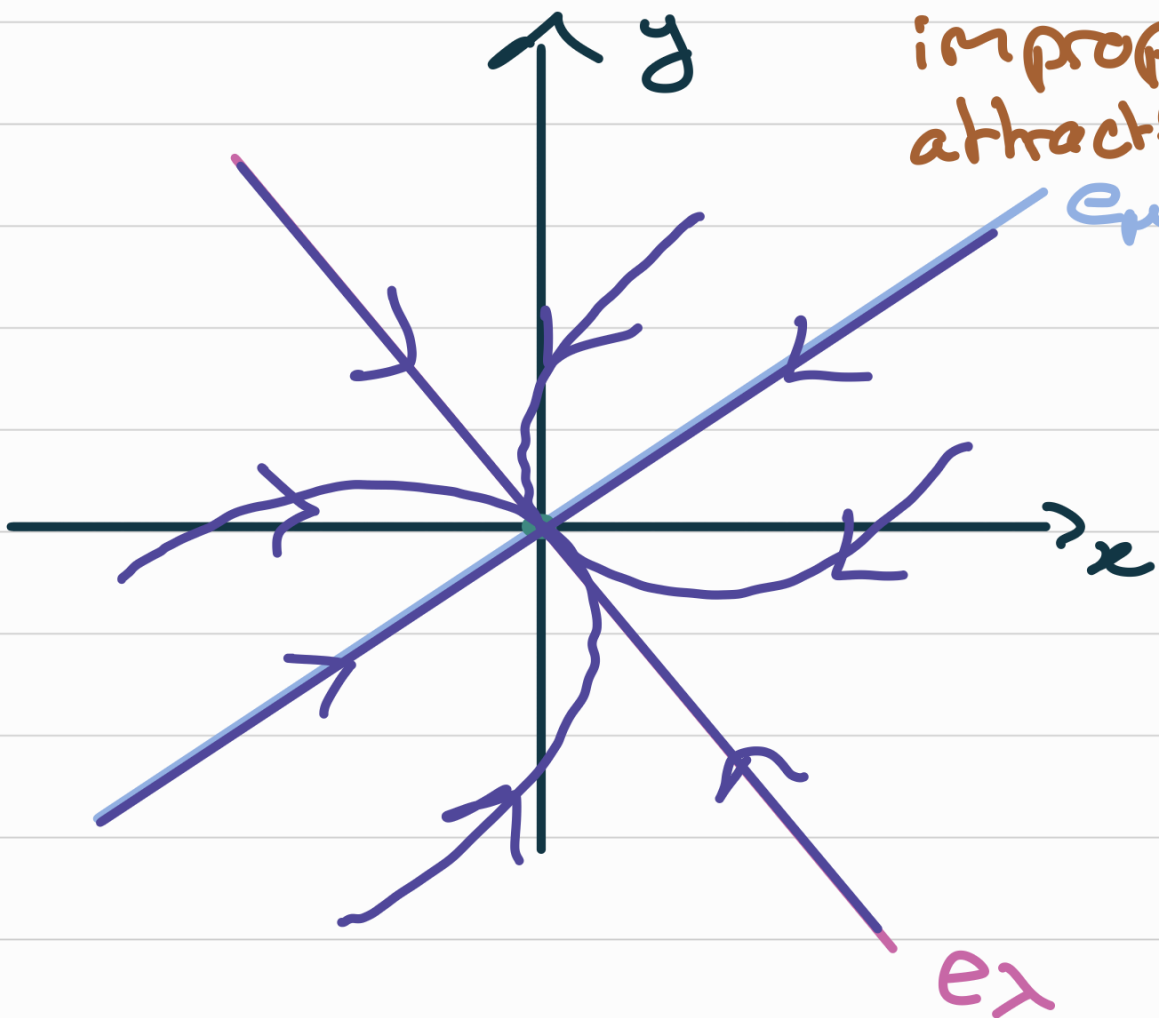


⑤

$$\lambda < \mu < 0$$



node
improper
attracting.



• Cas 2 : Les valeurs propres sont réelles et A n'est pas diagonalisable.

$$A \overset{\text{similaire}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

on note λ la valeur propre et (e_1, e_2) une base telle que :

$$\begin{cases} A e_1 = \lambda e_1 \\ A e_2 = e_1 + \lambda e_2 \end{cases}$$

• Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = (C_1 + t C_2) e^{\lambda t} \\ \tilde{y}(t) = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$