94 Le club de judo d'une ville comptait 200
rents en 2015. Le trésorier a constaté qu'en moye
chaque année, 80 % des adhérents renouvellent leur adhésion, et que de plus il y a 30 nouveaux arrivants.

Voici un algorithme où N est un nombre de $\mathbb{N}^*$.

$U \leftarrow 200$
Pour i allant de 1 à N
$\quad U \leftarrow 0{,}8\,U + 30$
Fin Pour

a) Appliquer l'algorithme avec $N = 4$.
Que représente la valeur de U en fin d'algorithme ?

b) Définir la suite (v_n) qui modélise cette situation à l'aide d'une relation de récurrence.

a)

- $200 \rightarrow 2015$
- $200 \times 0{,}8 + 30 = 190 \rightarrow 2016$
- $190 \times 0{,}8 + 30 = 182 \rightarrow 2017$
- $182 \times 0{,}8 + 30 = 175{,}6 \rightarrow 2018$

$\cdot\ 175,6 \times 0,8 + 30 = 170,48$

$\hookrightarrow 2019$

u représente en fin d'algorithme le terme de rang N.

3) $\boxed{v_{n+1} = 0,8 v_n + 30}$

117 Calculer chacune de ces sommes.

a) $R = 4 + 16 + 64 + \ldots + 1\,048\,576$

b) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256}$

c) $T = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-20}$

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

avec $\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$

$$\Rightarrow S = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

$$= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

a) $\overset{\times 4}{} \quad \overset{\times 4}{}$

$R = \underset{u_0}{\underline{4}} + \underset{u_1}{16} + \underset{u_2}{64} + \dots + \underbrace{1\,048\,576}_{u_?}$

on pose : $u_{n+1} = u_n \times 4$

on a : $u_0 = 4$

et $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times 4^n$

De plus, $1\,048\,576 = u_9$.

donc $R = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q}$$

$$= 4 \times \frac{1 - 4^{10}}{1 - 4}$$

$$= 1\,398\,100.$$

b)

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}\right)$$

- $\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 4} + \frac{1}{8} \xrightarrow{\times 4} + \frac{1}{32} \xrightarrow{\times 4} + \frac{1}{128}$

on pose $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{4}$ q

et $u_0 = \frac{1}{2}$.

avec $u_3 = \frac{1}{128}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}$$

$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

$$= u_0 \times \frac{1-q^4}{1-q}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^4}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{85}{128}.$$

• $\frac{1}{4} \xrightarrow[\times 4]{} \frac{1}{16} \xrightarrow[\times 4]{} \frac{1}{64} \xrightarrow[\times 4]{} \frac{1}{256}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$

on pose $q = \frac{1}{4}$

et $u_0 = \frac{1}{4}$ avec $u_3 = \frac{1}{256}$

$$\bullet \; \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$$

$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^4}{1 - q}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{85}{256}$$

Donc $S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}\right)$

$$- \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \right.$$

$$= \frac{85}{128} - \frac{85}{256}$$

$$= \frac{85}{256}.$$

e)

u ?

$$T = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-20}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{10^{20}}$$

$\times 10$ $\times 10$

on pose $q = \frac{1}{10}$ et

$u_0 = \frac{1}{10}$.

avec $u_{19} = \frac{1}{10^{20}} = 10^{-20}$

$$T = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{19}$$

$$T = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{19}$$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{20}}{1 - q}$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= 0{,}111111$$