

mesure et Intégration

exercice 4.1 :

• $\mu([0; x])$?

A borélien,

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{x_n}(A)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x_n \in A\}}.$$

$$\mu([0; x]) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{x_n}([0; x])$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x_n \in [0; x]\}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{x_n \leq x\}}$$

$$= \# \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x\}.$$

• Soit $x > 0$, $[0; x]$ borné.

$$\mu([0; x]) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \# \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x\} < +\infty$$

a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge vers a

- $\pi(x) := \mu([0; x])$

$$= \# \{ n \in \mathbb{N} : \underbrace{x_n}_{p \text{ premier}} \leq x \}$$

$$= \# \{ p \text{ premier} : p \leq x \}$$

exercice 4.3:

1) $\mathcal{F} := \{]a; +\infty[: a \in \mathbb{Q} \}$

- chacun de ces types d'intervalle est ouvert.

donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et
donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

remarque : $A \in \mathcal{P}(X)$

$$\sigma(A) = \{ \emptyset, A, A^c, X \}$$

$$\sigma(\{a, b, c\}) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}.$$

• Soit $a \in \mathbb{Q}$ / But : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$
engendre $\mathcal{I}$ - σ -alg

$$\mathcal{I} =] - \infty ; a [$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} \left(] a + \frac{1}{n} ; + \infty [\right)^c$$

$$\text{donc }] - \infty ; a [\in \sigma(\mathcal{F})$$

$$\text{et d'où } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{F})$$

$$\text{Donc } \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma \left(\left\{] a ; + \infty [: a \in \mathbb{Q} \right\} \right)$$

$$2) \mathcal{G} := \{]a; b[: a, b \in \mathbb{Q} \}$$

- chacun de ces types d'intervalle est ouvert.

$$\text{donc } \mathcal{G} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et}$$

$$\text{donc } \sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\bullet]a; +\infty[= \bigcup_{n \geq 1}]a; n[$$

$$\text{avec } n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$$

$$\text{donc }]a; +\infty[\in \sigma(\mathcal{G})$$

$$\text{d'où } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{G})$$

$$\text{Donc } \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a; b[: a, b \in \mathbb{Q} \})$$

3) on pose :

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \}.$$

$$\bullet f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$$

$$|f_n(x)| < \frac{1}{k}$$

Donc :

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{ x : |f_n(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

$$f_n(x) \in \left] -\frac{1}{k}; \frac{1}{k} \right[$$

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{ f_n^{-1} \left(\left] -\frac{1}{k}; \frac{1}{k} \right[\right) \right\}$$

ouvert

Donc $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. et
 A est un σ -algèbre.

exercice 5.2:

$\Rightarrow$. On suppose A mesurable
et on se place dans un
espace $(X; \mathcal{A})$ mesurable.

$$1) A : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$$f : E \rightarrow F \quad \text{avec } (E, \mathcal{F}) \text{ tribu.}$$

f mesurable si $\forall B \in \mathcal{F}$

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{E}.$$

Soit $] \frac{1}{2}; +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\bullet \chi_{] \frac{1}{2}; +\infty[}(x) = \begin{cases} 1 & x \in] \frac{1}{2}; +\infty[\\ 0 & x \notin] \frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$$

$$\chi_A^{-1}(] \frac{1}{2}; +\infty[) \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : \underbrace{f(x)}_{\in B}\}$$
$$= \{x \in X : \chi_A(x) \in] \frac{1}{2}; +\infty[\}$$

• Si $x \in A$, alors $\chi_A(x) = 1$
et $1 \in] \frac{1}{2}; +\infty[$

• Si $x \notin A$, alors $\chi_A(x) = 0$
et $0 \notin] \frac{1}{2}; +\infty[$.

$$= \{x \in X : x \in A\} = A \in \mathcal{E}$$

Donc χ_A est mesurable.

$\Leftarrow$ On suppose $f|_A$ mesurable

Espace mesurable : $(X, \mathcal{C})$
avec X ensemble et $\mathcal{C}$ tribu

$\Rightarrow$ une partie A de X est
mesurable si $A \in \mathcal{C}$.

$$\text{or } f_A^{-1}(\mathbb{I}_{\frac{1}{2}}; +\infty) = A$$

comme $f|_A$ est mesurable on
a $A \in \mathcal{C}$.

Donc A est mesurable.