

Devoir - maison

exercice 2 :

1) Il y a 64 choix possibles de caractères, et on veut une séquence de 4 caractères avec répétition possible et où l'ordre est important.

Donc il y a $64^4 = 16\ 777\ 216$ séquences possibles.

2) Il y a 64 choix possibles de caractères, et on veut une séquence de 4 caractères tous différents donc c'est un arrangement.

$$P_{64}^4 = \frac{64!}{(64-4)!} = \frac{64!}{60!}$$

$$= 64 \times 63 \times 62 \times 61$$

$$= 15\ 249\ 024$$

3) a) Comme on ne veut pas de A majuscule, alors on est dans le même cas que la question 1, mais avec 63 caractères disponibles.

Donc il y a $63^4 = 15\ 752\ 961$ séquences possibles.

3) Le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule est égal au nombre total de séquences moins le nombre de séquences ne comportant pas de A majuscule.

$$= 16\ 777\ 216 - 15\ 752\ 961 \\ = 1\ 024\ 255.$$

c) Il y a $\binom{4}{1}$ choix possibles par la position du caractère A.

Il y a 63^3 choix possibles par les trois autres

caractères.

Donc $4 \times 63^3 = 1\ 000\ 188$

d) Il y a $\binom{4}{2}$ choix possibles pour les deux positions du caractère A.

Il y a 63^2 choix possibles pour les deux autres caractères.

Donc $6 \times 63^2 = 23\ 814$

exercice 3 :

Montrons par récurrence
que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

Initialisation : $u_0 = 0$

et $u_1 = 0,5$

donc $0 \leq 0 \leq 0,5 \leq 1$

donc P_0 est vraie

On pose $f(x) = \frac{1}{2-x}$,
 $x \in [0; 1]$.

$$f'(x) = \frac{-(-1)}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2} > 0$$

donc f est strictement
croissante sur $[0, 1]$.

Hérédité: stable

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
et f est strictement croissante
sur $[0; 1]$.

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

d'où $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

donc P_{n+1} est vraie.



Donc on a montré par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.