

Feuille TD4

exercice 4.1:

• Le cas $n < +\infty$:

$$\textcircled{1} \phi = \bigcup_{i \in \phi} X_i$$

$i \in \phi$ is circled in red, and $i \in \{1, \dots, n\}$ is written in red below it.

ou $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$

$\textcircled{2}$ Si $A \in \mathcal{A}$, alors

$$A = \bigcup_{i \in I} X_i.$$

Par définition, $A^c = X \setminus A$.

donc : $A^c = \bigcup_{i=1}^n X_i \setminus \bigcup_{i \in I} X_i$

$$= \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus I} X_i \in \mathcal{C}$$

$\exists c \in \{1, \dots, n\}$.

③ Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$,

avec $A_k = \bigcup_{i \in I_k} X_i \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{k \geq 0} A_k = \bigcup_{k \geq 0} \bigcup_{i \in I_k} X_i$$

$$= \bigcup_{i \in \bigcup_{k \geq 0} I_k} X_i \in \mathcal{C}.$$

$\exists c \in \{1, \dots, n\}$

Donc $\mathcal{C}$ est une σ -algèbre.

Fenille TDS:

exercice 5.1:

• $\sigma \subset \sigma'$

Si $f: (X, \sigma) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$
est σ -mesurable :

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \sigma \subset \sigma'$$

donc f est σ' -mesurable.

$$\begin{aligned} f \text{ est } \sigma\text{-mesurable} \\ \Rightarrow f \text{ est } \sigma'\text{-mesurable} \end{aligned}$$

$$\cdot \boxed{\beta \in \beta'}$$

Si $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$
est β' -mesurable

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

d'où en particulier $\forall B \in \mathcal{B} \cap \beta'$
on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

donc f est β -mesurable.

f est β' -mesurable

$\Rightarrow f$ est β -mesurable

exercice 5.7:

1). $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{C}$
car $Y \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ tribu

• Soit $M \in \mathcal{C}$, alors
 $M = f^{-1}(B)$ avec $B \in \mathcal{B}$
d'où $M^c = (f^{-1}(B))^c$
 $= f^{-1}(B^c) \in \mathcal{C}$
car $B^c \in \mathcal{B}$ car $B \in \mathcal{B}$
et $\mathcal{B}$ tribu.

• Soit $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e.c.f.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{A}_k = \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{B}_k) \\ \text{avec } \mathcal{B}_k \in \mathcal{B}.$$

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{B}_k)$$

$$= \mathcal{J}^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_k\right)$$

$$\text{or } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_k \in \mathcal{B} \text{ car}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{B}_k \in \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \text{ tribu}$$

Donc $\mathcal{A}$ est une σ -algèbre.

$$2) f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$$

measurable, donc:

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

$$\text{or } \mathcal{A} = \{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \}$$

donc $\mathcal{A}$ est.

$$3) \mathcal{A} = \{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \text{ et } \mathbb{R} \} \\ = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \in B \}$$