

Feuille TD6

exercice 6.1 :

On suppose $|A|_e = 0$

$$\mu_e: X \rightarrow [0; +\infty]$$

- $\mu_e(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow \mu_e(A) \leq \mu_e(B)$
- $\mu_e\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_e(A_j)$

{ } mesure extérieure.

$$\mu : X \rightarrow [0; +\infty]$$

$$\bullet \mu(\emptyset) = 0$$

$$\bullet \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

$$\text{avec } A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

↳ *measure*

$$\bullet B \setminus A \subset B, \text{ alors}$$

$$|B \setminus A|_e \leq |B|_e.$$

$$\bullet B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$$

$$\text{donc } |B|_e \leq |B \setminus A|_e + |B \cap A|_e$$

$$\text{or } B \cap A \subset A, \quad |B \cap A|_e \leq |A|_e = 0 \\ \Rightarrow |B \cap A|_e = 0$$

D'au $|B|_e \leq |B \setminus A|_e$

et donc $|B \setminus A|_e = |B|_e$

• $|A \cup B|_e \leq |A|_e + |B|_e = |B|_e$

• $B \subseteq A \cup B \Rightarrow |B|_e \leq |A \cup B|_e$

donc $|B|_e = |A \cup B|_e$.

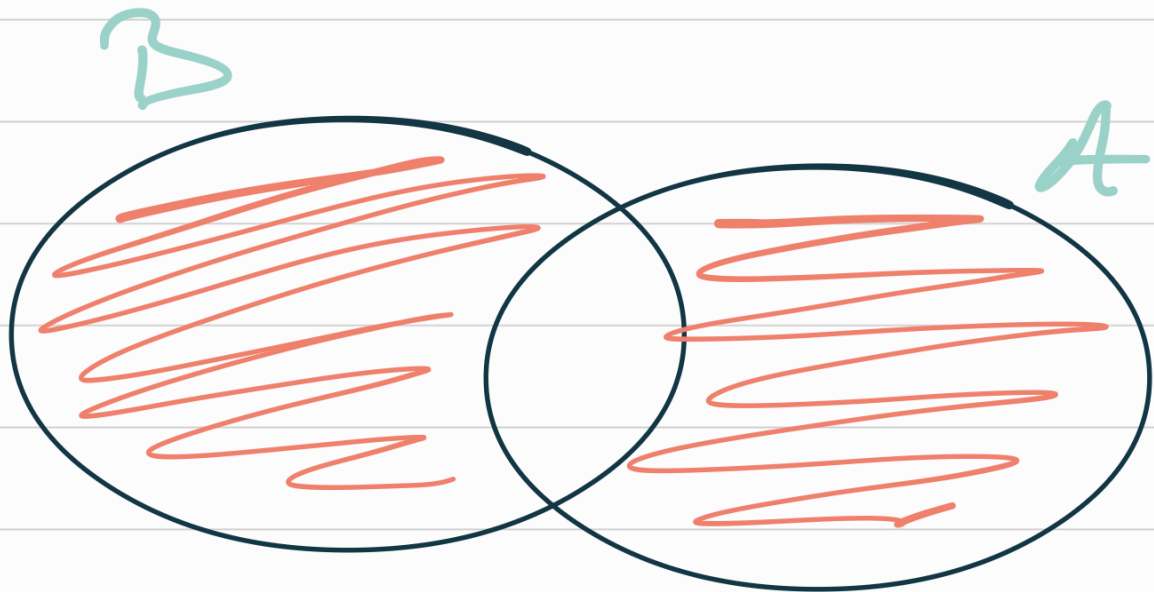
Donc :

$$|B|_e = |A \cup B|_e = |B|_e.$$

Tout ensemble de mesure
extérieure nulle est Lebesgue
mesurable et de mesure de
Lebesgue nulle

exercice 6.2 :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$B = (A \setminus (A \Delta B)) \cup ((A \Delta B) \cap B)$$
$$= A \Delta (A \Delta B)$$

or $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et comme $|A \Delta B|_e = 0$, alors $A \Delta B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ car $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est une σ -algèbre qui contient les ensembles de mesure extérieure nulle.

Et B s'écrit comme une union, d'intersection et de complémentaires de A et $A \Delta B$

Donc $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \lambda((A \cap B) \cup (A \setminus B)) \\ &= \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B)\end{aligned}$$

$$\lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(B \setminus A)$$

or $|A \Delta B|_c = 0$ et $A \Delta B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$

$$\text{alors } \lambda(A \Delta B) = 0 \implies \lambda(B \setminus A) + \lambda(A \setminus B) = 0$$

$$\text{d'où } \lambda(B \setminus A) = \lambda(A \setminus B) = 0$$

d'au $\lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(A \cap B)$

sq: $A \setminus B \subset A \Delta B$
 $B \setminus A \subset A \Delta B$

d'au $|A \setminus B|_e = |B \setminus A|_e = 0$

Donc comme $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

$$|A|_e \leq |A \cap B|_e + |A \setminus B|_e$$

$$= |A \cap B|_e \leq |B|_e$$

car $A \cap B \subset B$

$$|B|_e \leq |A \cap B|_e + |B \setminus A|_e$$

$$= |A \cap B|_e \leq |A|_e$$

car $A \cap B \subset A$.

Donc $\|B\|_e = \|A\|_e$, et
comme $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ alors
 $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda(B) = \lambda(A)$.

exercice 6.4 :

a) $\mu^+(\emptyset) = 0.$

• Soit $A \in \mathcal{B}$.

* si $\mathcal{B} = \emptyset$, alors $A = \emptyset$
et d'où $\mu^+(\mathcal{B}) = 0 = \mu^+(A)$ et
en particulier, $\mu^+(A) \leq \mu^+(\mathcal{B})$

* si $\mathcal{B} \neq \emptyset$ et si $A = \emptyset$,
alors $\mu^+(\mathcal{B}) = 1$ et $\mu^+(A) = 0$
et on a $\mu^+(A) \leq \mu^+(\mathcal{B})$

* si $\mathcal{B} \neq \emptyset$ et $A \neq \emptyset$, alors
 $\mu^+(\mathcal{B}) = 1 = \mu^+(A)$ et en
particulier $\mu^+(A) \leq \mu^+(\mathcal{B})$

Donc $\mu^+(A) \leq \mu^+(\mathcal{B})$.

• Soit $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ famille
on pose $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$

* Si $A = \emptyset$, alors $A_j = \emptyset$
 $\forall j$ et donc $\mu^*(A) = 0$
et $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = 0$ et en
particulière $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

* Si $A \neq \emptyset$, alors $\mu^*(A) = 1$

• On a forcément au moins
un des $A_j \neq \emptyset$ et avec $\mu^*(A_j) = 1$

et donc $\mu^*(A) = 1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$

donc μ^* est σ -sous-additive.

Donc μ^* est une mesure
extérieure.

Feuille TD 7

exercice 7.2:

Soit $x \in \mathbb{D}$.

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{x-r_k}} \mathbb{1}_{[r_k; 1+r_k]}(x) \right) d\lambda(x)$$

par Fubini-Tonelli:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\int_{r_k}^{1+r_k} \frac{1}{\sqrt{x-r_k}} d\lambda(x) \right)$$

on pose $u = x - r_k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} d\lambda(u) \right)$$

$$\text{or } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$= 1 \times \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} d\lambda(u)$$

$< +\infty$

$< +\infty$

$$\left[2\sqrt{u} \right]_0^1 = 2$$

donc f est intégrable

• Soit $I \subset \mathbb{R}$, $I = [a; b]$
avec $a < b$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
alors I contient au moins
un rationnel r_k .

On considère le k -ième
terme de la somme qui
définit f :

$$f_k(x) = \frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{x - r_k}} \mathbb{1}_{[r_k; r_k + 1/2^k)}.$$

Si $x \in I$ et x est proche
de r_k tel que $x > r_k$.

En particulier, si $x \rightarrow r_k^+$
alors : $\lim_{x \rightarrow r_k^+} f_k(x) = +\infty$.

De plus, on a :

$$f(x) \geq f_k(x) \text{ pour}$$

x dans le voisinage de r_k
dans I , et donc par
comparaison on aura que
 f ne sera pas bornée dans
le voisinage r_k .

Donc, f n'est pas bornée
sur I .

exercice 7.3 :

$$\bullet A = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$$

↳ A est mesurable car f est mesurable.

$$\int_X f d\mu \geq \int_A f d\mu$$

↖ f est positive

$$\geq \int_A \alpha d\mu$$

$$= \int_X \alpha 1_A(x) d\mu(x)$$

$$= \alpha \int_X 1_A(x) d\mu(x)$$

$$= \alpha \mu(A)$$

$$\text{d'où } \mu(\{f > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f d\mu$$

exercice 7.5 :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : f(x) > 0\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ avec } A_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\} \end{aligned}$$

on a que les $A_n, n \geq 1$ forment une suite croissante d'ensemble tel que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \mu(A) \end{aligned}$$

Montrons que $\mu(A_n) = 0$,
pour tout $n \geq 1$.

Soit $n \geq 1$

$$\mu(A_n) = \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right)$$

$$\leq n \cdot \underbrace{\int f \, d\mu}_{=0}$$

$$\leq 0$$

donc $\mu(A_n) = 0$, $\forall n \geq 1$

Alors $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.