

Géniale TDT :

exercice 2 :

$$2) \begin{cases} x' + 2x - 2y + 2 = 0 \\ 2y' - x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x + 2y - 2 \\ y' = \frac{x}{2} - 2y + \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 2y - 2 = 0 \\ \frac{x}{2} - 2y + \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

donc l'unique point stationnaire
est $(1; 2)$.

on pose :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 1 & \Leftrightarrow x = \tilde{x} + 1 \\ \tilde{y} = y - 2 & \Leftrightarrow y = \tilde{y} + 2 \end{cases}$$

$$* \quad x' + 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tilde{x} + 1)' + 2(\tilde{x} + 1) - 2(\tilde{y} + 2) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}' + 2\tilde{x} + \cancel{1} - 2\tilde{y} - \cancel{4} + \cancel{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tilde{x}' + 2\tilde{x} - 2\tilde{y} = 0}$$

$$* \quad 2y' - x + 4y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2\tilde{y}' - \tilde{x} + 4\tilde{y} = 0}$$

on a le nouveau système
avec $(0; 0)$ point stationnaire :

$$\begin{cases} \tilde{x}' + 2\tilde{x} - 2\tilde{y} = 0 \\ 2\tilde{y}' - \tilde{x} + 4\tilde{y} = 0 \end{cases}$$

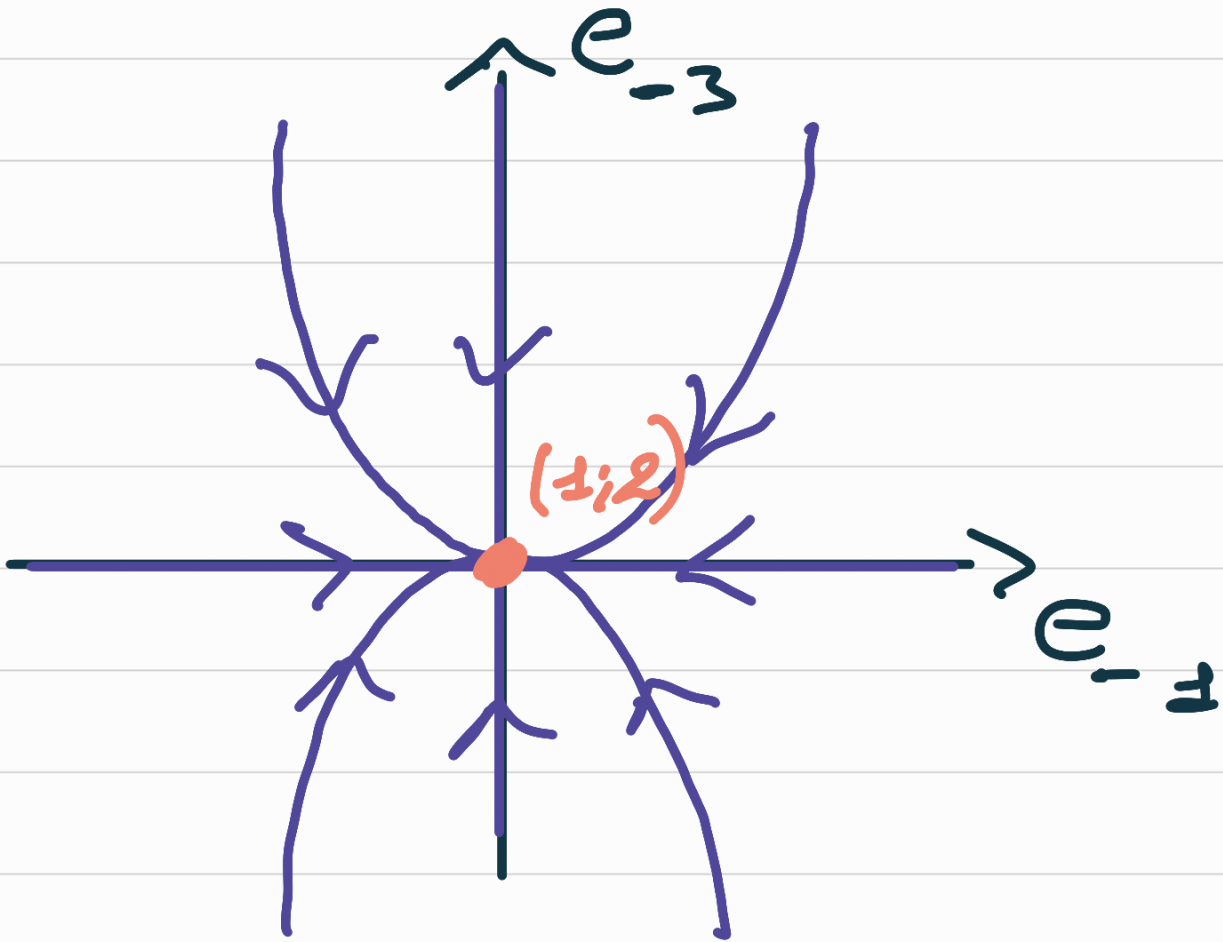
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x}' = -2\tilde{x} + 2\tilde{y} \\ \tilde{y}' = \frac{\tilde{x}}{2} - 2\tilde{y} \end{cases}$$

on pose :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

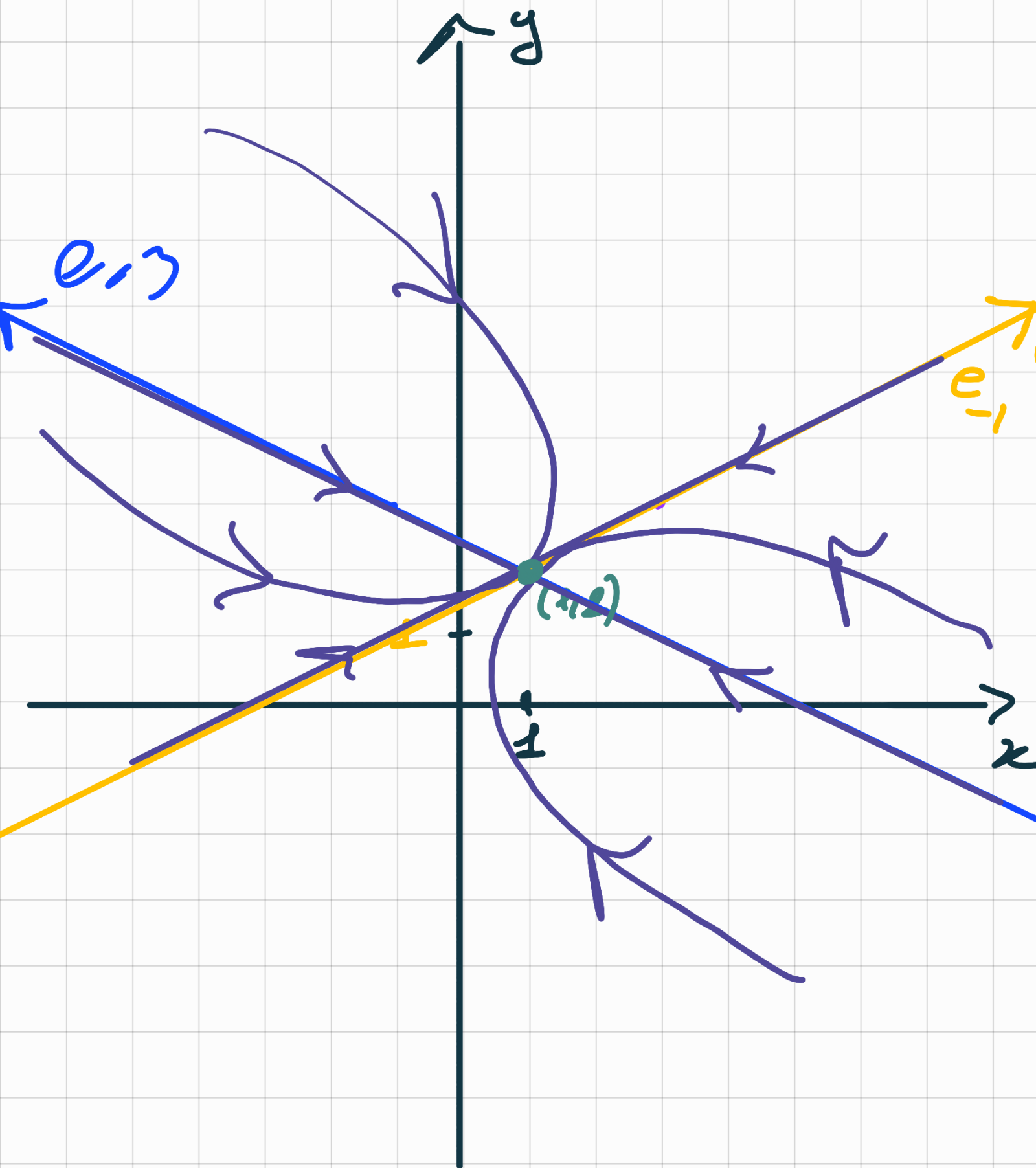
$\Rightarrow$ valeurs propres -1 et -3 .

donc A est diagonalisable
et $-3 < -1 < 0$.



$$\Rightarrow e_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{-3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



exemple: $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A$ non diagonalisable
et de v.p $-\frac{1}{2}$.

$$A \sim \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

Ae_1 Ae_2

$$e_{-\frac{1}{2}} = (1, 0) = e_1$$

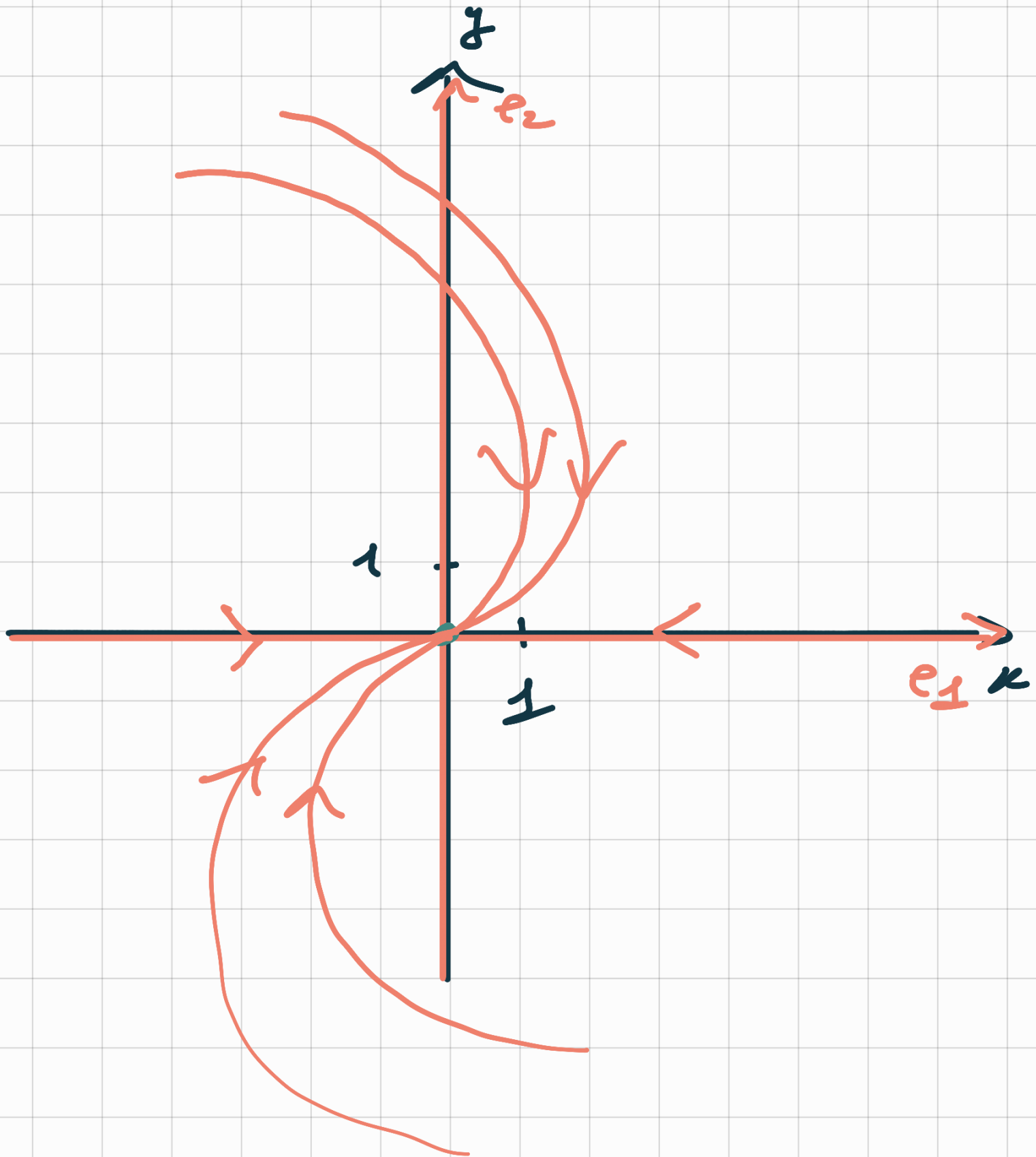
$$e_2 = (x, y)$$

$$b) Ae_2 = e_1 - \frac{1}{2}e_2 = (1, 0) - \frac{1}{2}(x, y)$$

$$\left(-\frac{1}{2}x + y, -\frac{1}{2}y\right) = \left(1 - \frac{1}{2}x; -\frac{1}{2}y\right)$$

$$\begin{cases} -\cancel{\frac{1}{2}}x + y = 1 - \cancel{\frac{1}{2}}x \\ -\cancel{\frac{1}{2}}y = -\cancel{\frac{1}{2}}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on page $e_2 = (0, 1)$



• fonction Lipschitzienne :

Soit $f: (E, N_1) \longrightarrow (F, N_2)$

f est k -Lipschitzienne
si $\forall x, y \in E :$

$$N_2(f(x) - f(y)) \leq k N_1(x - y)$$

exemple : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

f est k -Lipschitzienne
si $\forall x, y \in \mathbb{R} :$

$$\|f(x) - f(y)\|_{1,2,\infty} \leq k |x - y|$$

exercice 4 :

1) • $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$

• $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$

But : Trouver le plus petit k tel que : $|f(x, y) - f(x', y')| \leq k \times$
 $\|(x, y) - (x', y')\|_1$

$$|f(x, y) - f(x', y')| = |x - x'| + |y - y'|$$

$$= |ax + by - (ax' + by')|$$

$$= |a(x - x') + b(y - y')|$$

$$\leq |a| |x - x'| + |b| |y - y'|$$

$$\leq \max(|a|, |b|) \times (|x - x'| + |y - y'|)$$

$$\leq \max(|a|, |b|) \| (x, y) - (x', y') \|_1$$

•



2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\|f(x) - f(y)\|_1$$

$$= \|(|x|, 1+x) - (|y|, 1+y) \|_1$$

$$= \| (|x| - |y|, x - y) \|_1$$

$$= | |x| - |y| | + |x - y|$$

$$| |x| - |y| | \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$\leq |x - y| + |x - y|$$

$$\leq 2|x - y|$$

donc f est 2-lipshitzienne.

exercice 5:

1) $y' = \cos(y).$

on pose $f(t, y) = \cos(y)$
définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

si $f \in \mathcal{C}^1$ sur Ω , alors
 f est globalement Lipschitzienne
sur Ω .

f est globalement Lipschitzienne
par rapport à y car f est $\mathcal{C}^1$.
En particulier f est continue
en toutes ses variables.

Donc d'après le théorème
de Cauchy-Lipschitz globalement
Lipschitzien, il existe une
unique solution globale pour
la condition initiale $y(t_0) = y_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Cauchy-Lipschitz : global

• $f(t, y)$ avec $t \in I$
 $y \in \mathbb{K}^n$

$\rightarrow f$ continue par rapport à t et y .

$\rightarrow f$ globalement lipschitzienne par rapport à y (ind. t)

$\Rightarrow$ If $y(t_0) = y_0$, il existe une unique solution globale.

Cauchy-Lipschitz : Local

• $f(t, y)$ avec $t \in I$
 $y \in \mathbb{K}^n$

$\rightarrow f$ continue par rapport à t et y .

$\rightarrow f$ localement lipschitzienne par rapport à y (ind. t)

$\Rightarrow$ If $y(t_0) = y_0$, il existe une unique solution maximale