Géométrie

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On considère les points $A(-1;0;5)$ et $B(3;2;-1)$.
   Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

   Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :
   - la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$; $\vec{u}(1;-1;2)$
   - la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$. $\vec{v}(4;4;-6)$

   Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$. $\vec{n}(1;-1;1)$

   Affirmation 4 : La distance du point $C(2;-1;2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

1) • $\overrightarrow{AB}(4\,;2\,;-6)$

et $B \in (AB)$

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

or le vecteur $\vec{u}(-2\,;-1\,;3)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ car $\vec{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

donc une autre équation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

donc l'affirmation est vraie.

- $\vec{OA}(-1\,;0\,;5)$ $\qquad \vec{n}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$

  $\vec{OB}(3\,;2\,;-1)$

$$\vec{n}\cdot\vec{OA} = 5\times(-1)+0\times(-2)+5\times 1$$
$$= 0$$

$$\vec{n}\cdot\vec{OB} = 3\times 5 + 2\times(-2) + 1\times(-1)$$
$$= 10 \neq 0$$

donc $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal à (OAB).

L'affirmation est fausse.

2) $\vec{u}(1;-1;2)$ (d)

$\vec{v}(4;4;-6)$ (d')

• $\frac{1}{4}$ • $\frac{-1}{4} \neq 0$

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} 15+k = 1+4s \\ 8-k = 2+4s \\ -6+2k = 1-6s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1+4s-15 = -14+4s \\ 8-(-14+4s) = 2+4s \\ -6+2k = 1-6s \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k = 1 + 4s - 15 = -14 + 4s \\ 8 - (-14 + 4s) = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

$\rightarrow 1^{re}$ eqs

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k = -14 + 4s \\ 22 - 4s = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k = -14 + 4s \\ -4s - 4s = 2 - 22 \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

$\Rightarrow -8s = -20$

$s = \dfrac{-20}{-8} = \dfrac{5}{2}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k = -14 + 4 \times \dfrac{5}{2} \\ s = \dfrac{5}{2} \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = -4 \\ s = \dfrac{5}{2} \\ -6 + -8 = -14 \\ 1 - 6 \times \dfrac{5}{2} = -14 \end{cases}$$

$\checkmark$

donc (d) et (d') sont sécantes en un point

$L(11\,;\,12\,;\,-13)$

L'affirmation est fausse.

3) **méthode** :

1 écris l'équation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan et passant par le point

↳ astuce : le vecteur directeur c'est le vecteur normal du plan.

un vecteur directeur de la droite (d) perpendiculaire au plan est $\vec{n}(1;-1,1)$ car vecteur normal du plan.

Une représentation paramétrique de la droite (d) qui passe par C :

$$(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} , \quad \underline{t \in \mathbb{R}}$$

2 Trouver l'intersection du plan et de la droite càd les coordonnées du projeté ortho-du point

$x - y + z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2 + t - (-1-t) + 2 + t + 1 = 0$

$\Longleftrightarrow 2+t+1+t+2+t+1=0$

$\Longleftrightarrow 3t+6=0$

$\Longleftrightarrow t=\frac{-6}{3}=-2$

d'où les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (P) sont :

$H(\underset{2-2}{0}\,;\,\underset{-1-(-2)}{1}\,;\,\underset{2-2}{0})$

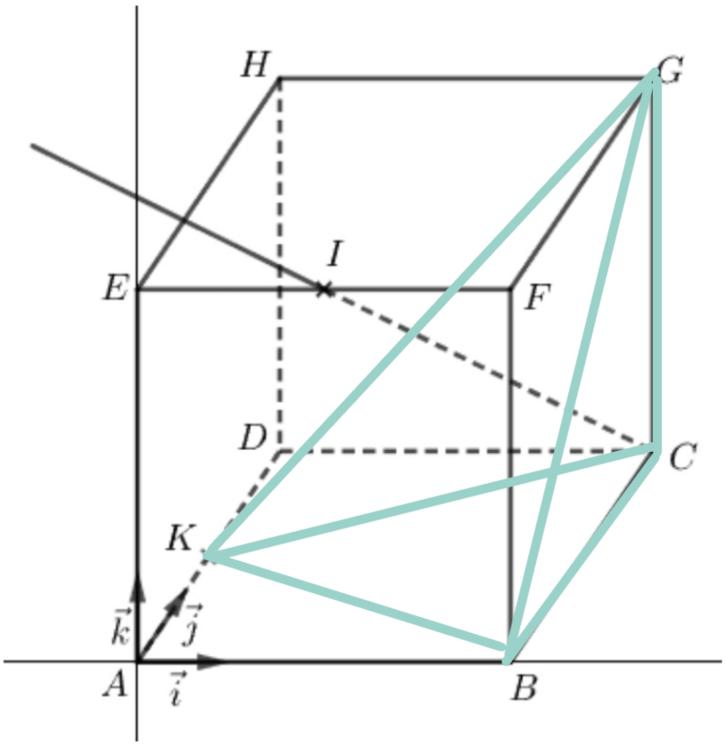
③ Calcule la distance entre le point et son projeté ortho.

$CH=\sqrt{(0-2)^2+(1-(-1))^2+(0-2)^2}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. vrai

Exercice 1 5 points

On considère un repère orthonormé $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points $B(4;0;0)$, $D(0;4;0)$, $E(0;0;4)$ et les points C, F, G et H de sorte que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.

2. On considère le point I milieu de l'arête $[EF]$.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

1) $C(4;4;0)$

$F(4;0;4)$

$G(4;4;4)$

$H(0;4;4)$

2) $I\left(\frac{0+4}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{4+4}{2}\right)$

$I(2 ; 0 ; 4)$

$\vec{IC}(2 ; 4 ; -4)$

d'où une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. On désigne par P le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de P avec (IC).
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est donnée par : $x + 2y - 2z - 4 = 0$.

   b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}; \frac{20}{9}; \frac{16}{9}\right)$.
   Que représente J par rapport à C ?

   c. Vérifier que le point $K(0; 2; 0)$ appartient au plan P.

   d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans P et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
   a. Déterminer le volume de la pyramide $CBKG$.

   b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

5. Justifier que la droite (BG) est incluse dans P.

6. On note I' un point de l'arête $[EF]$, et P' le plan orthogonal à la droite $(I'C)$ passant par G.
   Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P'?

3) a) un vecteur normal du plan (P) est $\vec{IC}(2;4;-4)$

$2x + 4y - 4z + d = 0$

or $G \in (P)$ donc

$2 \times 4 + 4 \times 4 - 4 \times 4 + d = 0$

$8 + d = 0 \Rightarrow d = -8$

ainsi une équation cartésienne du plan (P) est :

$$2x + 4y - 4z - 8 = 0$$

ou encore :

$$x + 2y - 2z - 4 = 0$$

b) $2 + 2t + 2 \times 4t - 2(4-4t) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 2t + 8t - 8 + 8t - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 18t - 10 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$

d'où les coordonnées de J sont : $\left(2 + 2 \times \frac{5}{9} ; 4 \times \frac{5}{9} ; 4 - 4 \times \frac{5}{9}\right)$

d'où $J\left(\frac{28}{9}; \frac{20}{9}; \frac{16}{9}\right)$

et J est projeté orthogonal de C sur (P).

---

c) $K(0;2;0) \in (P)$?

$0 + 2\times2 - 2\times0 - 4$

$= 4 - 4 = 0$

donc $K \in (P)$.

d) $B(4;0;0)$

$4 + 0\times2 - 2\times0 - 4 = 4-4 = 0$

donc $B \in (P)$.

D'où (BK) est incluse dans (P).

. $B \in (ABC)$

$\vec{AK} = k\,\vec{BC} + p\,\vec{BA}$?

$\vec{AK}(0;2;0)$ $\vec{BA}(-4;0;0)$

$\vec{BC}(0;4;0)$

$\hookrightarrow$ $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC} + 0\,\vec{BA}$.

Donc $K \in (ABC)$ et (BK) incluse dans (ABC).

D'où (BK) est intersection des deux plans.