

Feuille TD7 :

exercice 5 :

2) $y'y + y'' + y^2 = 0$

on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et on

a: $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -y'y - y^2 \end{pmatrix}$

on pose : $f(t, Y) = \begin{pmatrix} y' \\ -y'y - y^2 \end{pmatrix}$

telle que $Y' = f(t, Y)$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}^2$.

On a : f est de classe C^1 , donc en particulier elle est continue par rapport à ses deux variables et

de plus f est loc. Lipschitzienne par rapport à y .

$E^1 \Rightarrow$ loc. Lipschitzienne

Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local, il existe une unique solution maximale pour toute condition initiale $(y(0), y'(0)) = (y_0; y_1)$ pour tout $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

3) Posons $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $f(t, Y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ txy \end{pmatrix}$ telle que $Y' = f(t, Y)$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}^2$.

Comme J est de classe C^1 ,
alors elle est continue par
rapport aux deux variables et
localement lipschitzienne en
la variable y .

Donc d'après le théorème
de Cauchy-Lipschitz il existe
une unique solution maximale
à toute condition initiale $y(0) = y_0$
 $y_0 \in \mathbb{R}$.

exercice 6:

1) $y' = |y - t|$.

on pose $f(t, y) = |y - t|$
pour $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

• f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

• Montrons que f est Lipschitzienne.

Soit $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)|$$

$$= ||y_1 - t| - |y_2 - t||$$

$$\leq |y_1 - \cancel{t} - y_2 + \cancel{t}|$$

$$\leq |y_1 - y_2| \Rightarrow \begin{cases} \text{indépendant} \\ \text{uniformément} \\ \text{p/s à } t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &||x| - |y|| \\ &\leq |x - y| \end{aligned}$$

donc f est globalement Lipsch.
par rapport à y .

Donc d'après le théorème
de Cauchy-Lipschitz global
il existe une unique solution
globale pour toute condition
initiale $y(0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Feuille TD8

• $f: \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \mathcal{C}^1$

on dit $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est une intégrale première de P' ED $y' = f(y)$ si par toute solution y de P' équation on a :

$$\frac{d}{dt} (E(y(t))) = 0.$$

exercice 7 :

1) P' équation peut s'écrire

$$y' = f(y) \quad \text{avec} \quad y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } f(y) = \begin{pmatrix} y' \\ -y'(y' + 2y) / (2y' + 2) \end{pmatrix}.$$

$$y''(2y' + y) + y'(y' + 2y) = 0$$

$$\underbrace{2y''y'}_{((y')^2)'} + \underbrace{y''y + (y')^2}_{(y'y)'} + \underbrace{2yy'}_{(y^2)'} = 0$$

$$((y')^2)' \quad (y'y)' = (y'y)' \quad (y^2)'$$

$$((y')^2)' + (y'y)' + (y^2)' = 0$$

$$\left[(y')^2 + (y'y) + y^2 \right]' = 0$$

Donc une intégrale première est :

$$E(y) = (y')^2 + y'y + y^2$$

$$= y_1^2 + y_0 y_1 + y_0^2.$$

$$3) \begin{cases} x' = -xy^2 \\ y' = -yx^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x'}{x} = -y^2 \\ -x^2 = \frac{y'}{-y} \end{cases}$$

$$-x'x = -\frac{x'}{x}x^2 = -y^2 \frac{y'}{y} = -yy'$$

$$\left(-\frac{1}{2}x^2\right)' = \left(-\frac{1}{2}y^2\right)'$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2}(x^2 - y^2)' = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)' = 0$$

Donc une I.P est $E(x, y) = x^2 - y^2$.