

Feuille TDS

exercice 5:

Montrons que q est quadratique

$$\text{on pose } b(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + \frac{1}{2} x_2 y_3 + \frac{1}{2} x_3 y_2.$$

$$b(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$$

On voit que b est symétrique et bilinéaire de forme quadratique q .

Donc q est quadratique.

$$1) M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) M est diagonalisable car elle est symétrique.

$$M = P D P^t \Leftrightarrow D = P^t M P$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

λ_1 λ_2 λ_3

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ orthogonale $\Leftrightarrow P = P^{-1}$

$$3) e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1)$$

$$\rightarrow \|(-1, 0, 1)\|_2$$

$$e_2 = \frac{1}{2} (1, \sqrt{2}, 1)$$

$$\rightarrow \|(1, \sqrt{2}, 1)\|_2$$

$$e_3 = \frac{1}{2} (1, -\sqrt{2}, 1)$$

$$\rightarrow \|(1, -\sqrt{2}, 1)\|_2$$

pas
nécessaire

on a (e_1, e_2, e_3) forme
une b.o.n de E .

Donc si on note $y_i, i=1,2,3$
les coordonnées $x_i, i=1,2,3$ dans
la base (e_1, e_2, e_3) .

$$\text{On a: } q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

- q une forme quadratique de E .

Il existe toujours une base orthogonale de v.p telle que:

→ $\exists D \in \text{diag}$ qui représente q

→ q est représentée par le polynôme :

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

→ $\exists (f_1, \dots, f_n) \in E^*$ telle que :

$$q(x) = \lambda_1 f_1^2 + \dots + \lambda_n f_n^2$$

remarque:

$$q(x) = {}^t x \Pi_q x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

on pose $y = {}^t P x \Leftrightarrow x = P y$

$\in \mathcal{M}_{3,1}$

$$\begin{aligned} q(x) &= {}^t x \Pi_q x \\ &= {}^t (P y) \Pi_q P y \end{aligned}$$

$$= {}^t y \underbrace{{}^t P \Pi_q P}_D y$$

$$= {}^t y D y$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

(suite) y_i , $i = 1, 2, 3$ sont des formes linéaires de E

De plus, comme $\lambda_i > 0$ on peut poser : $\varepsilon_i = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \in \{-1, 1\}$

On a donc : $\Leftrightarrow \lambda_i = \varepsilon_i |\lambda_i|$

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2.$$

$$= \varepsilon_1 |\lambda_1| y_1^2 + \varepsilon_2 |\lambda_2| y_2^2 + \varepsilon_3 |\lambda_3| y_3^2$$

on pose $\phi_i(x) = \sqrt{|\lambda_i|} y_i$ et
on a $\phi_i^2(x) = |\lambda_i| y_i^2$.

$$\text{donc } q(x) = \varepsilon_1 \phi_1^2(x) + \varepsilon_2 \phi_2^2(x) + \varepsilon_3 \phi_3^2(x).$$

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

diagonalisable

$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2$$

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\rightarrow > 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2 \\ \text{pos} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2 \\ \text{sig} \end{matrix}$$

$$\rightarrow < 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2 \\ \text{pos} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2 \\ \text{sig} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \swarrow & \searrow \\ > 0 & & < 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 > 0 & & \lambda_1, \lambda_2 < 0 \end{matrix}$$

A est définie positive

$$\Leftrightarrow \det(A) > 0$$

et

$$\text{tr}(A) > 0$$

exercice 6 :

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \mu \\ \mu & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= (1-\lambda)(1+\lambda) - \mu^2 \\ &= 1 - \lambda^2 - \mu^2 \end{aligned}$$

$$\det A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \mu^2 < 1$$

$$\text{tr } A = 1 - \lambda + 1 + \lambda = 2 > 0$$

donc A est définie positive
si $\lambda^2 + \mu^2 < 1$.

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Critère de Sylvester:

$$\Delta_{1,1} = 4 > 0$$

$$\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

$$\Delta_{1,3} = \det(A) = 54 > 0$$

Ainsi P_A matrice est définie positive.

Fauille TD 6 :

exercice 1 :

1) $q(x) = \overset{a=1}{x_1 x_2} + x_1 \times \overset{B(x_3; x_4)}{x_4}$
 $+ x_2 \times \overset{C(x_3, x_4)}{x_3} + \overset{D(x_3, x_4)}{x_3 x_4}$

$$= \frac{a}{4} \left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a} \right)^2$$

$$- \frac{a}{4} \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a} \right)^2$$

$$+ \left(D - \frac{BC}{a} \right) \neq 0$$

$$= \frac{1}{4} \left(x_1 + x_2 + x_4 + x_3 \right)^2 - \frac{1}{4} \times \left(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \right)^2 + \cancel{(x_3 x_4 - x_3 x_4)}$$

donc $\text{sgn}(q) = (1; 1)$.

exercice 2:

2) $\forall q = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

les valeurs propres sont 5; 10.

$$v_5 = (1, 2) \quad v_{10} = (-2, 1)$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$$

donc dans la base (e_1, e_2)
on a :

$$M_q = P D^{\epsilon} P, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$q_2(x) = 5y_1^2 + 10y_2^2.$$

Critère de Sylvester:

$\Delta_0 = \pm 1$ i mineur d'ordre 0.

• $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$
 $\in (3; 0)$

• $\Delta_0 > 0, \Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$
 $\in (1; 2)$

• $\Delta_0 > 0, \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$
 $\in (0; 3)$

$$+, +, + \Rightarrow (3, 0)$$

$$+, +, - \Rightarrow (2, 1)$$

$$+, -, - \Rightarrow (2, 1)$$

$$-, -, - \Rightarrow (2, 1)$$

$$+, -, + \Rightarrow (1, 2)$$

$$-, -, + \Rightarrow (1, 2)$$

$$-, +, + \Rightarrow (1, 2)$$

$$-, +, - \Rightarrow (0, 3)$$